

Avant-propos

Les mathématiques sont le seul langage qui nous permette de décrire le monde en précision. Par « monde », nous n'entendons pas seulement l'univers, la nature ou même le monde humain¹ mais, plus généralement, l'ensemble des formes inscrites dans l'espace et le temps.

On remarquera que le mot « forme » en français, véhicule une heureuse ambiguïté : c'est, d'une part, l'organisation des contours d'une chose, son aspect ou sa silhouette et, d'autre part, sa configuration ou sa structure. Des Grecs jusqu'au XIX^e siècle, les philosophes n'ont cessé d'hésiter entre les deux sens de ce terme : l'apparence sensible et l'idée intelligible. Hegel mit tout le monde d'accord : cette soi-disant figure de l'extériorité qu'est la forme est précisément ce que le contenu intérieur de toute chose se donne nécessairement. Autrement dit, il n'y a pas de forme sans contenu ni, réciproquement, de contenu sans forme : on ne peut donc plus opposer les deux.

L'abstraction grandissante de la notion d'espace, en mathématiques, va dans le même sens. La généralisation de la notion de dimension, que l'on sait, depuis Descartes, détachée de l'espace concret, a permis la définition de toutes sortes d'espaces abstraits, susceptibles de modéliser ou de paramétrer de nombreux phénomènes, y compris non spatiaux au sens strict. Ainsi les formes temporelles, linguistiques, musicales, n'échappent pas à la représentation et d'autant moins que le temps n'est plus, aujourd'hui, séparé de l'espace. Toute forme, en somme, s'inscrit dans l'espace.

1. Le mot « monde », comme on sait, vient du latin *mundus* qui, comme le grec *kósmos*, veut dire « ordre » – primitivement, l'« ordre de la parure », en rapport avec l'idée d'une beauté physique et morale (« immonde », au contraire, signifie « laid », au sens de : « indigne d'être ou de figurer dans le monde »). Il renvoie donc tout aussi bien au grand ordre (*makrokósmos*) qu'au petit ordre (*microkósmos*), au monde commun (*koinon kósmos*) qu'au monde privé (*idios kósmos*).

Par « espace », nous n'entendrons donc pas seulement l'espace physique usuel, l'espace euclidien à n dimensions, avec $n = 3$ dans la situation courante, mais des espaces à un nombre de dimensions inférieur ou supérieur à ce dernier. Il existe, en effet, des espaces uni- ou bi-dimensionnels ($n = 1$ ou $n = 2$) qui jouent un rôle en chimie dans la modélisation de chaînes polymériques ou d'autres substrats ou composés bidimensionnels en général. Inversement, le nombre de dimensions de l'espace peut dépasser 3 comme lorsqu'on a affaire à l'espace-temps de Minkowski, espace pseudo-euclidien dans lequel $n = 4$, ou à des espaces plus abstraits comme les espaces de symétrie interne – d'isospin ou de jauge – en mécanique quantique, où l'on rencontre aussi couramment des espaces de dimension infinie comme les espaces de Hilbert.

Le propre des formes – définies plus haut en rapport avec l'espace – est de pouvoir se soumettre à des *transformations* (qui sont des transformations *spatiales* ou *spatio-temporelles*). Par « transformation », nous entendons, avec les mathématiciens, une *transformation ponctuelle inversible*, qui associe à chaque point de l'espace considéré un point et un seul du même espace, et telle qu'à partir de tout point image, on puisse revenir de façon unique au point d'origine par une autre transformation du même type : cette condition d'inversibilité exclut donc certaines transformations (par exemple, la projection sur un sous-espace).

D'un point de vue mathématique, ces transformations forment ce que l'on appelle un *groupe* pour l'opération « composition » (notée $\circ$). Pour le voir, notons, selon la convention usuelle, $T_2 \circ T_1$ ou, plus simplement, $T_2.T_1$ la composition des transformations T_1 et T_2 effectuées dans cet ordre. Une telle transformation associe à tout point de l'espace le point transformé $x \rightarrow x' = T_2.T_1(x) = T_2(T_1(x))$. Cette opération possède les propriétés suivantes :

$$T_3.(T_2.T_1) = (T_3.T_2).T_1 \quad (\text{associativité})$$

$$T.I = I.T = T \quad (\text{la transformation } I : x \rightarrow x \text{ est élément neutre})$$

$$T.T^{-1} = I \quad (\text{où } T^{-1} \text{ est la transformation inverse de } T)$$

Nous allons en particulier nous intéresser à un type de transformations appelé *symétries*, c'est-à-dire à des transformations agissant sur un objet ou un système et qui préservent ses propriétés géométriques (par exemple, les dimensions, ou les angles, ou le volume, etc.), ou encore ses propriétés physiques (structure interne, dynamique, etc.). On distinguera donc soigneusement le concept de *symétrie* de celui de *transformation*. Une transformation peut agir sur un système physique, ses coordonnées et ses autres degrés de liberté, mais elle n'est pas nécessairement une symétrie, au sens que nous venons de définir. Ce que l'on appelle « symétrie » est, en fait, lié à une certaine *invariance* de l'objet considéré. Mais, il est vrai que, comme les transformations, les symétries d'un objet géométrique ou d'un système physique forment un groupe,

la composition de deux symétries étant encore une symétrie. Ce groupe est appelé le *groupe de symétrie* ou le *groupe d'invariance* de l'objet considéré.

Ces symétries se trouvent réalisées, plus ou moins parfaitement, dans la plupart des objets de la nature inerte comme vivante. Mais elles caractérisent aussi les constructions humaines – concrètes comme abstraites. En conséquence nous verrons que, non seulement les physiciens ont progressivement compris que la symétrie, et les brisures de symétrie, étaient un fil conducteur très remarquable pour explorer les lois de la nature, mais que les biologistes en sont venus, peu à peu, à penser la même chose². Nous plaçons pour que la philosophie et les sciences humaines suivent aussi ce fécond fil conducteur.

L'objet de cet ouvrage est non seulement de rappeler les succès de telles méthodes, mais précisément de montrer que les sciences humaines et la philosophie auraient tout intérêt à s'en inspirer, ce qui ne semble guère, pour l'instant, être le cas.

2. On notera cependant – nous le rappelions dans un ouvrage antérieur – que la symétrie, quelle que soit son importance par ailleurs, n'est pas une notion absolument primitive. La théorie des graphes montre, par exemple, que le fait, pour un graphe, d'être arête-transitif (existence d'un automorphisme entre deux arêtes) et sommet-transitif (existence d'un automorphisme entre deux sommets), suffit en fait à définir la symétrie [PAR 24a].