Avant-propos

Cet ouvrage est destiné, principalement, à de jeunes chercheurs qui manient des caméras thermiques en laboratoire ou en extérieur, pour observer le comportement d'une machine, d'un processus industriel ou d'un ouvrage du génie civil, et qui, devant les difficultés considérables d'interprétation des thermographies, souhaitent simuler de telles images sur l'ordinateur. Ils sont naturellement amenés à la méthode des éléments finis, mais ils découvrent que les codes existants sont mal adaptés à ce type de problèmes et qu'il est nécessaire de développer, à la fois dans le prétraitement, dans le calcul lui-même et dans le post-traitement, des procédures pour lesquelles il n'existe aucun guide, ni aucun ouvrage de référence vraiment pertinent.

Dans cet avant-propos, toutefois, nous aimerions nous adresser d'abord aux collègues expérimentés, principalement issus de la communauté des éléments finis, susceptibles d'encadrer de tels travaux, ou d'en enseigner la théorie, lesquels se sentiront peut-être un peu déconcertés devant la variété des sources scientifiques à mobiliser pour traiter correctement un problème d'apparence aussi simple. Simple, en effet, car il s'agit essentiellement de coupler deux équations bien connues : d'une part, celle de la diffusion de la chaleur dans les solides, une équation aux dérivées partielles, elliptique en régime permanent, parabolique en régime transitoire, et, d'autre part, pour les réflexions du rayonnement entre les surfaces de la scène, l'équation intégrale qui porte indifférement le nom de l'un des deux mathématiciens qui l'ont décrite simultanément au début du XX^{e} siècle, Ivar Fredholm (1866-1927) et Vito Volterra (1860-1940). Or, cette dernière se prête très bien à la méthode de Monte-Carlo. Il faut lancer une quantité vertigineuse de rayons depuis toutes les surfaces de la scène pour avoir une solution précise, mais cela n'est plus vraiment un problème aujourd'hui, grâce aux progrès de l'informatique.

On imagine donc les chercheurs construire la géométrie à simuler, la mailler par un processus automatique, probablement de manière non structurée, avec des tétraèdres dont il faut ensuite extraire la peau, elle-même constituée d'un grand nombre de triangles, éventuellement soumis aux réflexions d'un rayonnement en ondes courtes, par exemple depuis le Soleil (premier lancer de rayons, indépendant du calcul éléments finis), puis émettant des ondes longues en fonction de la quatrième puissance de leur température, lesquelles se réfléchissent à leur tour (deuxième lancer de rayons, intégré cette fois au schéma des différences finies). Une fois terminé le calcul, un troisième lancer de rayons, réalisé en posttraitement depuis la position de la caméra, permet enfin de former l'image recherchée. Outre de nombreuses difficultés techniques, cette manière de procéder entraîne cependant une insatisfaction d'ordre théorique.

L'idéalisation de la nature qui sert de cadre aux images (monde visible), à l'équation de Fourier (gradients thermiques) et à la méthode des éléments finis est celle des *milieux continus*. Elle correspond à l'échelle où vivent les êtres humains et où ils développent leurs artefacts, depuis les plus petits, qui tiennent dans la paume de la main, jusqu'aux plus grands ouvrages de l'architecture et du génie civil. Afin de suivre fidèlement la forme d'un objet, l'élément fini a une taille qui varie, typiquement, du dixième de millimètre à la centaine de mètres. De part et d'autre de cette échelle, la géométrie, au sens des Grecs, se perd dans des descriptions statistiques, puis discrètes. Ici, nous ramenons de la mécanique quantique l'idéalisation de la continuité du corps noir, tandis que, depuis les orbites képlériennes, nous rapportons les trajets apparents du Soleil dans le ciel continu de notre scène.

Dans les milieux continus, le calcul des variations permet de résoudre globalement une équation aux dérivées partielles, à partir d'une fonctionnelle qu'il s'agit, en général, de minimiser. Par rapport à la formulation des éléments finis selon Galerkin, qui revient à discrétiser non seulement la géométrie, mais aussi l'équation, le calcul des variations ne discrétise que la fonctionnelle. C'est pourquoi nous utilisons systématiquement ce dernier, en introduisant successivement dans la fonctionnelle du champ des températures la diffusion en régime permanent, les conditions aux limites de Neumann et la convection, mais aussi, ce qui est moins fréquent dans la littérature, le régime transitoire et le rayonnement. Par rapport à la clarté de cet exposé, la résolution par Monte-Carlo de l'équation de Voltera paraît d'autant plus obscure : chaque rayon lancé ignore tout de ses voisins, nous ne sommes plus dans les milieux continus.

Dans la seconde moitié du XX^{e} siècle, la communauté nouvelle de l'infographie et du rendu réaliste s'est emparée de cette équation, qu'elle a rebaptisée « équation d'illumination globale ». Deux hypothèses principales – la réflexion est lambertienne et la scène est discrétisée en carreaux – permettent de la réduire à un simple système linéaire, où toute la géométrie est concentrée dans les « facteurs de vue ». Pour le reste, la *méthode de radiosité* ressemble tellement à celle des éléments finis que certains auteurs n'hésitent pas à l'y rapporter. De fait, elle a été incluse très naturellement dans les principaux codes éléments finis, mais sous sa forme classique, avec l'hypothèse restrictive de la réflexion parfaitement diffuse.

Lorsque les scènes étudiées deviennent complexes, il est cependant nécessaire de réintroduire les techniques de lancer de rayons, mais seulement dans l'évaluation des facteurs de vue, pour détecter précisément les objets qui s'interposent entre deux carreaux (élimination des parties cachées). Rien n'empêche alors de prolonger par une réflexion spéculaire un rayon qui rencontrerait une surface polie, de manière à étendre le facteur de vue à « l'autre côté du miroir ». En fait, les *facteurs de vue étendus* permettent de prendre en compte tous les types de réflexion possible ou de transmission au travers des objets translucides. Il est remarquable que la discrétisation ne s'opère plus que sur la géométrie : discrétisation des surfaces de la scène en carreaux, lesquels forment la peau du maillage éléments finis, puis discrétisation des facteurs de vue en rayons, sans perte de généralité dans la description des propriétés optiques. Il y a donc une grande affinité entre le calcul des variations et la méthode de radiosité étendue : les équations et la physique qu'elles décrivent demeurent intactes dans l'idéalisation des milieux continus.

Dans le dernier tiers du XX^{e} siècle, une autre simplification est venue, cette fois, de la communauté de la conception assistée par ordinateur. Comme nous le rappelons ici, cette idée a tardé quelques années avant d'être reprise par la communauté émergente des éléments finis, sous le nom d'*éléments isoparamétriques* : les mêmes fonctions de forme décrivent la géométrie et le champ physique étudié. Nous montrons dans cet ouvrage les avantages du maillage structuré résultant, en particulier pour le couplage conductif-radiatif. En partant de nos travaux précédents, nous proposons une partition de la sphère ou de l'hémisphère qui permette de stratifier le lancer de rayons de manière idéale, soit à angles solides égaux, soit à facteurs de vue égaux. Lorsque l'on tire depuis la peau des éléments isoparamétriques, on bénéficie encore des propriétés du maillage structuré, et donc indicé, pour le repérage des éléments. Le maillage structuré permet en outre de respecter parfaitement les symétries de la géométrie étudiée. Si les conditions aux limites imposées sont également symétriques, alors on peut retrouver ces symétries dans la solution, ce qui constitue un avantage essentiel pour la compréhension, l'interprétation et la vérification des simulations.

Dans le chapitre 8, nous empruntons à une communauté très particulière, qui travaille sur le confort dans les bâtiments, la notion de *température moyenne radiante*, soit la température que mesurerait un thermomètre placé dans un globe peint en noir. Cette température est définie en tout point de l'espace, même au sein du vide ou d'un milieu parfaitement transparent. Elle illustre donc bien l'intégration du rayonnement aux milieux continus, et devrait trouver sa place dans la physique du rayonnement, au-delà du champ restreint où elle a été proposée.

Cet ouvrage s'arrête donc avant l'introduction de la dynamique des fluides et d'autres phénomènes complexes, comme les changements de phase. Cependant, il faut noter que de tels problèmes, certes très ardus à mettre en œuvre dans la simulation, ne posent aucune difficulté particulière quant à leur participation aux milieux continus. Cette difficulté n'existait que pour le rayonnement. Nous l'avons clarifiée ici, et nous pensons que notre démarche constitue le meilleur point de départ possible pour toute application multiphysique future conçue à partir de la thermique des milieux continus.

Un dernier commentaire concerne les simulations multi-échelles, devenues habituelles dans d'autres domaines de la mécanique, l'élasticité par exemple, mais encore peu définies dans le champ de la thermique. L'échelle que nous décrivons ici est centrée sur une maille de dix centimètres de côté, à un facteur dix près. À l'échelle inférieure, centrée sur le millimètre, il devient inconcevable de mailler une scène entière. C'est la première échelle des matériaux, par exemple de l'épaisseur d'un vitrage que l'on souhaite doter de certaines propriétés thermiques et optiques. À notre échelle, il est habituel de recevoir de telles propriétés, pour paramétrer les simulations, par exemple, d'un grand bâtiment utilisant ces vitrages. Nous devrions retourner les résultats de nos simulations comme conditions aux limites pour les études propres aux matériaux, mais cela ne se fait pas encore. Il n'y a donc pas de dialogue avec l'échelle inférieure, pas plus qu'avec l'échelle immédiatement supérieure. Celle-ci, centrée sur le décamètre, fait encore partie des milieux continus, mais la géométrie y est nécessairement simplifiée. Elle est probablement indispensable pour certaines simulations de dynamique des fluides encore inenvisageables sur de grands modèles (par exemple, la ville entière où se trouve le bâtiment) qui seraient trop détaillés. Cette échelle devrait à son tour dialoguer avec les deux échelles supérieures, bien identifiées sous le nom d'échelle *méso* (maille d'un kilomètre de côté, c'est l'échelle, entre autres, des météorologues) et d'échelle *macro* (cent kilomètres de côté, utilisée par les climatologues pour des simulations globales de notre planète).

Les milieux continus sont vastes, leur description comprend trois échelles spatiales séparées l'une de l'autre par un facteur cent : celles du millimètre, du décimètre et du décamètre. Si l'on part de l'échelle centrale – par exemple pour l'étude des échanges thermiques dans une rue – il faut dialoguer avec les deux échelles situées de part et d'autre – dans notre exemple : celle des revêtements et celle de la ville entière – toutes deux appartenant encore aux milieux continus. Tout ce qui est expliqué dans cet ouvrage s'applique donc encore. Le même programme peut servir aux trois échelles, à condition de pouvoir zoomer et dézoomer dans le modèle géométrique, ce qui peut être réalisé par des techniques de maillage adaptatif. En revanche, et tant qu'un tel processus ne sera pas maîtrisé, il serait prématuré de forcer le dialogue avec les météorologues et les physiciens des matériaux : nous avons seulement commencé de défricher le chemin, et, avec cet ouvrage, nous posons un premier, mais indispensable, jalon.

Introduction

Dans le monde physique, la chaleur se transmet selon deux modes très différents : de proche en proche, au sein de ce qu'il est convenu d'appeler les milieux continus, et par rayonnement, dans les milieux transparents. Dans le premier mode, des particules s'agitent au sein d'un solide (conduction) ou se déplacent au sein d'un fluide (convection). Dans le second, la chaleur est transportée par des photons, qui traversent le vide sur des distances immenses, à la vitesse de la lumière, puis, éventuellement, pénètrent l'atmosphère terrestre et d'autres milieux semi-transparents, tels que l'eau ou le verre, avec des interactions plus ou moins importantes qui se manifestent sous la forme d'absorption et de diffusion (le ciel bleu, les nuages, l'océan, les vitrages).

Cet ouvrage se divise donc en deux parties. La première est centrée sur l'équation de diffusion de la chaleur, et la seconde sur celle de la radiosité. Pour résoudre la première, la méthode reine est celle des éléments finis, alors que, pour la seconde, c'est le lancer de rayons. Ces deux méthodes ont rarement été traitées ensemble. L'intérêt principal de cet ouvrage est de présenter le calcul du couplage entre la conduction et le rayonnement pour des géométries complexes, avec toute la généralité nécessaire quant à la description des propriétés thermiques des matériaux, ainsi que des propriétés optiques des surfaces qui les enserrent.

Le chapitre 1 décrit la méthode des éléments finis, en suivant pas à pas les cinq étapes historiques qui l'ont construite en l'espace de deux siècles. On rappelle d'abord l'équation aux dérivées partielles de la diffusion proposée par

Joseph Fourier au début du XIXe siècle, puis la fonctionnelle en régime permanent, qu'il s'agit de minimiser, selon les techniques du calcul des variations développées par Leonhard Euler et Joseph-Louis Lagrange à la fin du siècle précédent. Il faut ensuite attendre un siècle avant que Walther Ritz ne propose, en 1908, les fonctions d'essais qui ont permis un progrès substantiel dans la résolution du problème. Au milieu du XXe siècle, le développement des ordinateurs rend possible de découper la géométrie étudiée en un grand nombre d'éléments de taille finie, et d'appliquer à chacun d'eux une procédure dite de Rayleigh-Ritz. Au milieu des années 1960, Bruce Irons, reprenant les idées développées par Steven Anson Coons dans le domaine de la conception assistée par ordinateur, a défini les éléments isoparamétriques, lesquels donnent à la méthode des éléments finis sa formulation la plus élégante, dans le cadre du maillage structuré.

Dans le chapitre 2, les conditions aux limites sont abordées à partir des multiplicateurs de Lagrange, qui donnent une forme très pratique aux conditions de Dirichlet, et qui permettent également de coller entre eux des maillages structurés non coïncidents. Les conditions de Neumann sont ensuite abordées, ainsi que la convection, à partir de nœuds virtuels mis en rapport avec les carreaux de Coons, lesquels sont les surfaces limitant les éléments isoparamétriques qui constituent le solide étudié. Dans ces différents aspects, on profite des propriétés particulières du maillage structuré, lequel nous accompagnera jusqu'à la fin de l'ouvrage. Les mêmes problèmes peuvent être étudiés avec le maillage non structuré par excellence, qui est celui que composent les tétraèdres et triangles de Delaunay. Cependant, les différences sont tellement nombreuses qu'il faudrait entreprendre un second ouvrage, pour arriver aux mêmes résultats, mais avec des difficultés considérables, y compris dans l'expression du couplage entre la conduction et le rayonnement. Le fil rouge de notre raisonnement est donné par les éléments isoparamétriques, auxquels nous souhaitons rendre tout leur attrait, lequel apparaît particulièrement dans le domaine de la thermique.

Le chapitre 3 propose une extension du principe variationnel au régime transitoire, ainsi qu'un schéma de différences finies pour aborder l'aspect temporel. La capacité thermique est introduite, et l'on voit que l'inertie thermique produit des retards considérables dans la diffusion de la chaleur au travers des solides. C'est donc la conduction qui gouverne généralement les problèmes de thermique.

Les éléments isoparamétriques sont détaillés dans le chapitre 4. Leur nom dérive du fait que les fonctions de forme sont les mêmes pour la description de la géométrie et pour celle du champ physique étudié. Ils permettent de reproduire des géométries complexes, en préservant leurs symétries, avec un repérage aisé des nœuds et des éléments.

La seconde partie de l'ouvrage commence au chapitre 5, avec la description de la densité spectrale du rayonnement électromagnétique émis par un corps noir idéal (loi de Planck), en montrant la séparation entre ondes courtes (émises par le Soleil) et ondes longues (émises par la Terre). L'accent est mis sur la description spatiale du rayonnement, qui fait appel à deux notions géométriques fondamentales : l'angle solide et le facteur de vue. Nous montrons finalement comment calculer de manière efficace le facteur de vue entre deux carreaux de Coons.

Les ondes courtes font l'objet du chapitre 6. Nous rappelons rapidement les trajets apparents du Soleil dans le ciel et l'atténuation de son rayonnement par l'atmosphère. Les réflexions des ondes courtes sur les surfaces d'une scène terrestre sont étudiées en toute généralité, que la réflexion soit parfaitement diffuse (formulation classique des équations de radiosité) ou plus complexe (introduction des facteurs de vue étendus pour prendre en compte, par exemple, des miroirs). Comme le rayonnement en ondes courtes est parfaitement découplé de celui des objets de la scène (qui n'émettent que des ondes longues), l'irradiance résultante sur les carreaux de Coons se ramène à une simple charge.

Il n'en va pas de même avec les ondes longues, traitées dans le chapitre 7. Cette fois, toutes les surfaces de la scène émettent, en fonction de leur température (loi de Stefan Boltzmann), qui est donnée par le calcul des éléments finis. En régime transitoire, il est donc nécessaire d'intégrer ce calcul au schéma de différences finies. À la fin de ce chapitre, il est devenu possible d'obtenir des vues en perspective de la scène, où chaque surface est coloriée en fonction de sa température, c'est-à-dire : une version numérique de la thermographie.

Dans le huitième et dernier chapitre, on se propose de créer une thermographie panoramique de la scène, au moyen d'une double projection. La scène est d'abord projetée sur une sphère unitaire entourant le point de vue. Cette projection centrale est ensuite ramenée sur le plan, en suivant la technique proposée en 1805 par Karl Brandan Mollweide. La projection de Mollweide est équivalente, c'est-à-dire qu'elle conserve les rapports de surface, et donc les angles solides, lesquels sont, par définition, les aires projetées sur la sphère unitaire et mesurées en stéradians. Cela veut dire que les radiances partant des surfaces de la scène en direction du point de vue peuvent être directement additionnées sur les pixels de la projection de Mollweide, de manière à obtenir la température moyenne radiante. Celle-ci, moyennée avec la température de l'air, donne la température opérative, laquelle donne finalement une bonne indication de ce que ressentirait une personne se trouvant en ce lieu, en l'absence de vent.

Cet ouvrage propose une étude du couplage entre la conduction et le rayonnement, lequel intéresse de nombreuses applications. La séparation entre ondes courtes et ondes longues n'est pas toujours pertinente, elle ne concerne que des scènes situées sur notre planète et soumises au rayonnement solaire (Beckers 2016). Parmi ces scènes, les plus stimulantes sont les villes, et les bâtiments qui les forment, lesquels, du fait de leurs formes régulières, trouvent dans les éléments isoparamétriques leur maillage naturel. Cet ouvrage est donc particulièrement destiné aux simulations de la physique urbaine.