Avant-propos

Le résultat marquant que Newton tire de sa théorie de la gravitation universelle est la résolution complète du problème des deux corps (1684). En pratique, lorsqu'on néglige l'influence gravitationnelle des autres corps célestes, l'orbite elliptique d'une planète autour du Soleil est généralement une bonne approximation de son orbite réelle. Cependant, si on s'intéresse au mouvement de la Lune autour de la Terre, il n'est pas possible de négliger l'influence du Soleil. Le problème des mouvements de la Lune n'est pas une simple question académique. Avec le développement au XV^e^ siècle de la navigation en pleine mer, le calcul de la longitude se révèle un problème très difficile. Les solutions trouvées (comme alternatives aux chronomètres de marine) utilisent la position de la Lune par rapport aux étoiles : elles sont très imprécises, car la position de la Lune est difficile à prévoir. C'est dans ce contexte que Newton se lance dans l'étude du système Terre-Lune-Soleil à partir de sa théorie de la gravitation universelle : mais ses résultats sont incomplets. Cette entreprise est finalisée par l'astronome allemand Tobias Mayer avec les premières impressions de ses Tables de la Lune (« Tabulæ motuum Solis et Lunæ novæ et correctæ ») en 1752 :

> « Je suis d'autant plus enclin à publier mes tables, que les astronomes les plus célèbres de presque toutes les époques ont ardemment souhaité une théorie parfaite de la Lune [...] en raison de l'importance de son utilisation pour la navigation. J'ai construit ces tables [...] en rapport aux inégalités du mouvement, tirées de la célèbre théorie du grand Newton et des équations analytiques générales qu'a pu en tirer pour la première fois l'éminent mathématicien Euler. »

Les plus grands mathématiciens s'intéressent à cette question : Lagrange écrit son article « Le problème des trois corps » en 1772 et Laplace introduit le terme mécanique céleste en 1796. Les principaux résultats sont obtenus en développant des méthodes d'approximation très efficaces (méthode des perturbations), pour décrire le mouvement des corps célestes sur de longues durées. Mais les durées d'évolution infinies ne sont pas abordables par ces techniques : en particulier les questions de stabilité – qui conditionnent la précision des prédictions à long terme – ne peuvent pas être considérées. En 1885, le mathématicien Mittag Leffler arrive à convaincre le roi Oscar II de Suède d'organiser un concours dont l'enjeu porte sur le problème de la stabilité du système solaire. La question exacte est formulée par Weierstrass :

> « Étant donné un système de N corps qui s'attirent mutuellement conformément à la loi de la gravitation, et en supposant qu'il n'y ait jamais de collision entre deux corps, donner les coordonnées des corps individuels, pour n'importe quel moment de l'avenir ou du passé, sous la forme d'une série uniformément convergente dont les termes sont composés de fonctions connues. »

C'est Henri Poincaré qui remporte le prix du concours (1889). Les idées et méthodes qu'il propose à cette occasion sont révolutionnaires et ouvrent la voie à la théorie des systèmes dynamiques – et par extension à la théorie du chaos.

Imaginons le système solaire avec les planètes de masses nulles. Alors toutes tourneront éternellement sur leurs orbites képlériennes, chacune aura son énergie et son moment angulaire qui sont des quantités éternellement préservées. Ajoutons un peu de masse aux planètes : elles vont maintenant interagir, échanger entre elles de l'énergie et du moment angulaire. Nous avons perdu la conservation des quantités pour les planètes individuelles, ne conservant plus que l'énergie globale et le moment angulaire global. On peut s'imaginer dès lors, que certaines lois sont perdues, que les mouvements vont visiter en général partout où les lois restantes leur permettent d'aller. En 1954, Kolmogorov énonce un théorème affirmant qu'il n'en est rien. Plus précisément, pour une petite perturbation d'un système mécanique admettant beaucoup de lois de conservation, les mouvements vont être comme ceux du système non perturbé, avec une probabilité positive. Mais d'autres mouvements chaotiques vont se présenter, eux aussi avec une probabilité positive : le système va alors avoir des mouvements ordonnés et des mouvements chaotiques enchevêtrés, chacun apparaissant à toutes les échelles.

Le non-mathématicien pourra être touché par les questions de stabilité du système solaire : il aura pourtant du mal à s'imaginer que les difficultés du théorème de Kolmogorov viennent du problème des petits diviseurs où entrent en jeu de délicates relations arithmétiques – on parle de résonances – entre certains paramètres des orbites. C'est cette relation entre stabilité dynamique, résonances et petits diviseurs qui va nous intéresser tout au long des chapitres de cet ouvrage.

Plus précisément, notre but est de présenter certaines des avancées mathématiques marquantes impulsées par Poincaré et ayant abouti (entre autres) au(x) théorème(s) de Kolmogorov-Arnold-Moser (KAM). Chaque chapitre est construit autour d'un certain nombres de résultats clés, chacun étant énoncé le plus simplement possible dans son contexte scientifique et où nous avons essayé de faire ressortir les idées importantes, en se limitant à chaque fois aux seules notions et techniques nécessaires. Nous avons divisé l'exposé en deux volumes. Dans le premier, nous abordons le théorème de Floquet sur les équations linéaires à coefficients périodiques (théorème-F), le théorème de stabilité de Poincaré-Lyapunov (théorème-PL), le théorème de la variété instable de Hadamard-Perron (théorème-HP), le théorème de linéarisation de Grobman-Hartman (théorème-GH), le théorème de linéarisation de Sternberg (théorème-St) et enfin, le théorème de linéarisation de Siegel (théorème-S). Le théorème de Siegel peut être considéré comme un des premiers résultats de la théorie KAM en ce sens qu'il peut être explicitement abordé – et compris – à partir de la problématique des petits diviseurs.

Le deuxième volume est consacré au(x) théorème(s) KAM proprement dit(s), avec le théorème du cercle d'Arnold (théorème-A), le théorème du twist de Moser (version analytique-réelle : théorème-M), suivi du théorème des tores invariants de Kolmogorov pour les flots hamiltoniens en dimension finie (théorème-K). La méthode KAM introduite par Kolmogorov en 1954 est basée sur une technique de point fixe (à convergence super-exponentielle), pouvant être vue comme un analogue fonctionnel de la méthode de Newton de résolution des équations numériques. Il est étonnant de noter que Newton se retrouve – en un sens – à l'origine des méthodes modernes d'analyse d'un problème des trois corps qu'il n'avait pas pu résoudre près de trois siècles auparavant.

Cet ouvrage s'adresse aux apprentis mathématiciens et physiciens ; il pourra aussi être utile à des chercheurs confirmés (mathématiciens et/ou physiciens), non spécialistes des méthodes KAM et qui auraient besoin d'une introduction à la fois simple d'accès et solide dans son contenu. Il est aussi, dans notre esprit, une porte ouverte sur des résultats et ouvrages plus avancés dont nous donnons les références au fil du texte.