Introduction

Objectif. Cet ouvrage est le quatrième volume d'une série, dédiée à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la physique, qui pourrait en comporter sept :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Fonctions continues*[1]
volume 3 : *Distributions*
volume 4 : *Intégration*
volume 5 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev*
volume 6 : *Traces*
volume 7 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce quatrième volume a pour objet d'étudier l'intégrale, à valeurs vectorielles aussi bien que réelles, et les espaces de Lebesgue et d'en donner les principales propriétés utiles pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Deux méthodes permettent de construire $L^p(\Omega; E)$ et d'intégrer :
— la première, classique, considère des *classes de fonctions p.p. égales* d'un ensemble Ω *mesurable* à valeurs dans un espace E *de Fréchet*, mais pas mieux ;
— la seconde considère des *mesures* d'un ensemble Ω *ouvert* à valeurs dans un espace E *de Neumann*.

Ces méthodes sont équivalentes lorsque toutes deux sont définies, et nous insistons sur les propriétés de la seconde pour laquelle E est beaucoup plus général.

1. Le volume 2 eut gagné à être intitulé *Calcul différentiel*.

Contenu. La première partie est consacrée à l'intégration : nous définissons l'espace $L^1(\Omega; E)$ des *mesures intégrables*, où Ω est un ouvert de $\mathbb{R}^d$ et E est un espace de Neumann (c'est-à-dire un espace muni de semi-normes, séparé, où toute suite de Cauchy converge) et l'intégrale $\int_\omega f$, où $f \in L^1(\Omega; E)$ et ω est un ensemble mesurable. Nous donnons quelques propriétés, dont l'image par une application linéaire, le changement de variable et l'intégration de variables multiples.

La deuxième partie est consacrée aux espaces de Lebesgue $L^p(\Omega; E)$, des *mesures p-intégrables*. Nous étudions la dépendance en p, en Ω et en E, l'image par les applications linéaires ou multilinéaires, le changement de variable et la séparation des variables, la pondération, les compacts et les duaux.

La troisième partie traite des *classes de fonctions p-intégrables*, quand l'espace E est de Fréchet. Nous leur associons des mesures qui sont identiques aux mesures définies aux parties 1 et 2, et le théorème de convergence dominée de Lebesgue donne des résultats supplémentaires, en particulier sur l'image par les fonctions continues.

Originalité. Nous ne construisons pas $L^p(\Omega; E)$ seulement pour un espace E de Banach, comme Salomon BOCHNER [5] ou Nicolas BOURBAKI [8], mais pour un espace E de Neumann, ce qui est beaucoup plus général.

Nous construisons directement l'intégrale à valeurs dans un espace de Neumann, sans utiliser l'intégrale réelle qui n'est qu'un cas particulier de notre construction. C'est la propriété la plus générale assurant des propriétés satisfaisantes à l'intégrale, comme nous le verrons au § 5.5, p. 101.

Les mesures jouent le rôle habituellement dévolu aux *classes de fonctions mesurables presque partout égales*. Plus précisément, nous construisons l'espace $L^p(\Omega; E)$ des *mesures p-intégrables* comme un sous-ensemble de l'espace $\mathcal{M}(\Omega; E)$ des mesures. Nous évitons ainsi le passage au quotient qui est nécessaire pour les fonctions mesurables : nos mesures intégrables sont «naturellement» des distributions comme toute mesure ou toute fonction continue, ce qui est adapté aux edp.

La pondération (§ 14.4 et 14.5), qui joue pour un ouvert Ω un rôle analogue à la convolution (celle-ci n'est définie que dans tout $\mathbb{R}^d$), est également originale.

Mesure *versus* classe de fonctions. L'espace des *mesures p-intégrables* f est (théorème 17.33, p. 361) **identique** à l'espace des *mesures $\overline{f}$ associées aux classes de fonctions* $\dot{\mathsf{f}}$ par (théorème 17.29, p. 358) $\langle \overline{f}, \varphi \rangle = \int_\Omega \dot{\mathsf{f}} \varphi$.

Ceci sous réserve que E soit un espace de Fréchet, sinon la théorie des fonctions mesurables est défaillante : par exemple, le théorème 17.3 d'Egoroff n'est plus satisfait.

Applications. De nombreux espaces de valeurs possibles sont cités au § 5.4, p. 100.

Dans les problèmes d'évolution, en séparant la variable de temps de celles d'espace, on pourra ainsi intégrer en temps à valeurs dans un espace de Sobolev $W^{m,p}(\Omega)$ ou $W^{m,p}_{\mathrm{loc}}(\Omega)$ pour $1 \leq p \leq \infty$, ou dans $W^{m,p}(\Omega)$-faible pour $1 < p < \infty$ ainsi que dans $L^\infty(\Omega)$-$*$faible. À défaut de pouvoir intégrer à valeurs dans $L^1(\Omega)$-faible, qui n'est pas séquentiellement complet, on pourra l'immerger dans l'espace des mesures $\mathcal{M}(\Omega)$ (que nous munissons de sa topologie *simple*) qui, lui, est séquentiellement complet.

On pourra, de même, utiliser les espaces de Lebesgue $L^q(0, T; E)$ où E est n'importe quel espace sur Ω que nous venons de mentionner, ou bien d'autres encore.

Intérêt des mesures. Nous construisons l'intégrale $\int_\Omega f$ comme limite de l'intégrale de Cauchy de fonctions f_n uniformément continues. Ces fonctions f_n convergeant vers f dans $\mathcal{M}(\Omega; E)$, nous évitons la construction (complexe, faisant appel à la théorie des filtres) de leur *complété* qu'utilise Nicolas BOURBAKI.

Nous définissons ainsi $L^p(\Omega; E)$ pour plus d'espaces E, puisque *séquentiellement complet* est moins restrictif que *complet*. Par exemple, si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, H-faible est séquentiellement complet mais n'est pas complet [vol. 1, propriété (4.11), p. 82].

Semi-normes. Nous utilisons des familles de semi-normes plutôt que des topologies localement convexes, ce qui est équivalent, car on peut élever une semi-norme à une puissance p, pas un voisinage convexe !

Le maniement des espaces semi-normés est simple, bien que moins familier que celui des espaces topologiques : il suit celui des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs (semi-)normes et non plus sur une seule norme. Par exemple, nous engendrons la topologie de $\mathcal{K}(\Omega)$ par la famille de semi-normes $\|\varphi\|_{\mathcal{K}(\Omega);q} = \sup_{x\in\Omega} q(x)|\varphi(x)|$ indexées par $q \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, ce qui est beaucoup plus simple que sa construction (équivalente) comme limite inductive des $\mathcal{C}_K(\Omega)$.

Pré-requis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel qu'à des résultats établis aux volumes précédents, dont nous rappelons l'énoncé et la référence de leur démonstration.

L'ouvrage est rédigé pour pouvoir être lu dans le désordre par un non-spécialiste : les démonstrations sont détaillées en incluant ce qui va de soi quand on lit ou connaît ce qui précède, et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères peuvent, contrairement au corps du texte, faire appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. L'annexe *Rappels* est, elle aussi, composée en petits caractères car elle peut être supposée connue.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est précisée autant que possible, en notes de bas de page, excepté pour les *Rappels* pour lesquels on se reportera aux volumes précédents.

Les résultats sur les mesures intégrables à valeurs dans un espace de Neumann sont tous nouveaux[2], à la connaissance de l'auteur. Ils ne sont pas signalés comme tels, ce qui serait lassant ; ceci concerne les chapitres 4 à 8 et 10 à 14, ainsi que le théorème 17.33, p. 361.

Navigation dans l'ouvrage :
— La **table des matières**, en tête, donne la liste des thèmes traités.
— L'**index**, p. 403, fournit un autre accès thématique.
— La **table des notations**, p. 401, précise leur sens en cas de doute.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés afin de les retrouver aisément en suivant l'ordre des numéros (ainsi, les propositions 1.8 et 1.9 se trouvent entre les énoncés 1.7 et 1.10, qui sont des définitions).

Remerciements. Il m'est très agréable de remercier mes amis Enrique FERNÁNDEZ-CARA, qui m'a suggéré de nombreuses améliorations, et Jérôme LEMOINE qui m'a convaincu de la nécessité de traiter les *classes de fonctions intégrables*, qui y a apporté une contribution importante, dont le théorème 17.12 et de multiples corrections, et qui a relu avec soin cette partie de l'ouvrage.

Jacques SIMON
Chapdes-Beaufort, le 20 décembre 2024

2. Laurent SCHWARTZ a donné des résultats relatifs à des *distributions sommables* [66, § 5, p. 126–137]. Ils semblent difficilement comparables. Par exemple sa définition de l'intégrale (proposition 36, p. 129) semble à valeurs dans E même si E n'est pas quasi-complet, ce qui contredit notre théorème 5.13, p. 102.