

Table des matières

Introduction	xiii
Partie 1. Intégration	1
Chapitre 1. Intégration des fonctions continues	3
1.1. Espaces de Neumann	3
1.2. Applications continues	7
1.3. Intégrale de Cauchy d'une fonction uniformément continue	10
1.4. Quelques propriétés de l'intégrale	13
1.5. Dépendance de l'intégrale par rapport au domaine d'intégration	16
1.6. Continuité de l'intégrale	19
1.7. Intégrations successives	21
Chapitre 2. Ensembles mesurables	23
2.1. Pourquoi introduire les ensembles mesurables ?	23
2.2. Quelques propriétés de la mesure d'un ouvert	25
2.3. Définition des ensembles mesurables et de leur mesure	28
2.4. Premières propriétés de la mesure	32
2.5. Additivité de la mesure	34
2.6. Réunion et intersection dénombrables d'ensembles mesurables	37
2.7. Continuité de la mesure	40
2.8. Invariance par translation et mesure d'un produit	44
2.9. Ensembles négligeables	47

Chapitre 3. Mesures	51
3.1. Espace $\mathcal{M}(\Omega; E)$ des mesures	51
3.2. Équicontinuité des bornés de $\mathcal{M}(\Omega; E)$	54
3.3. Complétude séquentielle de $\mathcal{M}(\Omega; E)$	58
3.4. Continuité de l'application $\langle \cdot, \cdot \rangle$	59
3.5. Identifications des fonctions continues à des mesures	61
3.6. Régularisation des mesures	67
3.7. Régularisation des fonctions	73
Chapitre 4. Mesures intégrables	79
4.1. Définition des mesures intégrables	79
4.2. Espace $L^1(\Omega; E)$ des mesures intégrables	82
4.3. Quelques propriétés de $L^1(\Omega; E)$	85
4.4. Régularisation dans $L^1(\Omega; E)$	87
4.5. Complétude séquentielle de $L^1(\Omega; E)$	88
Chapitre 5. Intégration des mesures intégrables	91
5.1. Intégrale d'une mesure intégrable	91
5.2. Linéarité et continuité de l'intégrale	95
5.3. Mesures positives, intégrale réelle	97
5.4. Exemples d'espaces des valeurs	100
5.5. Le cas où E n'est pas un espace de Neumann	101
Chapitre 6. Propriétés de l'intégrable	105
6.1. Additivité par rapport au domaine d'intégration	105
6.2. Continuité par rapport au domaine d'intégration	109
6.3. Contribution des parties négligeables	113
6.4. Image d'une mesure par une application linéaire	114
6.5. Image par une application linéaire	115
6.6. Restriction, support	119
6.7. Dérivation sous le signe somme	121
Chapitre 7. Changement de variable	123
7.1. Image d'un ensemble mesurable	123
7.2. Déterminant de d vecteurs	125
7.3. Mesure d'un parallélépipède	127
7.4. Changement de variable dans l'intégrale de Cauchy	130
7.5. Changement de variable dans une mesure	137
7.6. Changement de variable dans une mesure intégrable	141
7.7. Produit d'une mesure par une fonction continue	143
7.8. Changement de variable dans une intégrale	145
7.9. Changements de variable affines	148

Chapitre 8. Intégration de variables multiples	151
8.1. Permutation des variables d'une mesure de mesures	151
8.2. Intégration d'une mesure de mesures intégrable	152
8.3. Séparation des variables dans l'intégrale d'une fonction continue	155
8.4. Séparation des variables d'une mesure	158
8.5. Séparation des variables	161
8.6. Théorème de Fubini	164
Partie 2. Espaces de Lebesgue	169
Chapitre 9. Inégalités	171
9.1. Inégalités élémentaires	171
9.2. Inégalités pour les fonctions continues	174
9.3. Inégalité de convolution de Young	177
9.4. Propriétés des régularisées de fonctions continues	179
Chapitre 10. Espaces $L^p(\Omega; E)$	183
10.1. Définition de $L^p(\Omega; E)$	183
10.2. Séparation de $L^p(\Omega; E)$	188
10.3. Quelques propriétés de $L^p(\Omega; E)$	189
10.4. Propriétés de $L^\infty(\Omega; E)$	192
10.5. Approximation par les régularisées et densité	196
10.6. Complétude de $L^p(\Omega; E)$	199
10.7. Remarques sur les méthodes de construction	203
Chapitre 11. Dépendance en p et Ω, espaces locaux	207
11.1. Dépendance en p	207
11.2. Espaces $L^p_{\text{loc}}(\Omega; E)$	211
11.3. Localisation–prolongement	216
11.4. Dépendance en Ω	219
11.5. Recollement infini en Ω et continuité en p	222
Chapitre 12. Image par une application linéaire	227
12.1. Image par une application linéaire et dépendance en E	227
12.2. Image par une application multilinéaire	231
12.3. Image dans les espaces de Banach et de Hilbert	237
12.4. Image dans les espaces locaux	240
Chapitre 13. Opérations diverses	243
13.1. Image par une semi-norme de E	243
13.2. Puissances	247

13.3. Prolongement	250
13.4. Mesures en escalier	252
13.5. Densité et séparabilité	256
13.6. Limite d'une suite bornée dans $L^\infty(\Omega; E)$	259
Chapitre 14. Changement de variable, pondération	261
14.1. Changement de variable	261
14.2. Regroupement et séparation des variables	264
14.3. Permutation des variables	271
14.4. Pondération des mesures	273
14.5. Pondération	276
Chapitre 15. Compacts	281
15.1. Préliminaires	281
15.2. Compacts de $L^p(\Omega; E)$	284
15.3. Cas particuliers de compacité	288
15.4. Compacts de $L^p_{\text{loc}}(\Omega; E)$	293
15.5. Compacité dans des espaces intermédiaires	295
Chapitre 16. Duals	299
16.1. Convexité uniforme de $L^p(\Omega; E)$	299
16.2. Injection canonique de $L^{p'}(\Omega; E')$ dans le dual de $L^p(\Omega; E)$	307
16.3. Théorèmes de représentation de Riesz	312
16.4. Théorème de Riesz–Fréchet	317
16.5. Topologie faible de $L^p(\Omega; E)$	319
16.6. Topologie $*$ faible de $L^\infty(\Omega; E)$	322
Partie 3. Fonctions intégrables	325
Chapitre 17. Fonctions mesurables	327
17.1. Fonctions mesurables	327
17.2. Intégrale des fonctions mesurables positives	332
17.3. Convergence dominée des fonctions positives	337
17.4. Espace des classes de fonctions intégrables	342
17.5. Complétion et approximation des espaces de classes de fonctions	346
17.6. Quelques propriétés des espaces de classes de fonctions	352
17.7. Points de Lebesgue	354
17.8. Mesures associées à des classes de fonctions	358
17.9. Identité des espaces de mesures	361

Chapitre 18. Applications	365
18.1. Équi-intégrabilité	365
18.2. Convergence dominée	368
18.3. Image par une application continue	371
18.4. Continuité en p croissant (à nouveau)	374
18.5. Théorème de représentation de Riesz (à nouveau)	376
Annexe. Rappels	383
Bibliographie	397
Liste des notations et figures	401
Index	403