

Table des matières

Avant-propos	1
Partie 1. Topologie et calcul différentiel	3
Chapitre 1. Topologie	5
1.1. Définitions	6
1.2. Espaces métriques compacts	14
1.3. Espaces métriques complets	20
1.4. Théorème du point fixe de Banach	21
1.5. Espaces de Banach et applications linéaires continues	24
1.6. Compléments	29
1.6.1. Propriétés de Borel-Lebesgue et de Bolzano-Weierstrass	29
1.6.2. Espaces compacts et espaces complets	32
1.6.3. Prolongement d'application uniformément continue	33
1.6.4. Théorème de Baire	35
1.6.5. Théorème d'Ascoli	41
1.6.6. Théorème de Stone-Weierstrass	44
1.6.7. Théorèmes de points fixes de Brouwer et de Schauder	48
1.7. Exercices	55
1.8. Solutions	61
Chapitre 2. Calcul différentiel	77
2.1. Différentielle	77
2.1.1. Différentielle partielle	80
2.1.2. Différentielle d'une application composée	81

2.1.3. Inégalité des accroissements finis	82
2.1.4. Caractérisation des fonctions C^1	84
2.1.5. Différentielle d'ordre 2	86
2.1.6. Différentielle d'ordre supérieur	89
2.2. Théorèmes d'inversion locale et des fonctions implicites	90
2.2.1. Application : changement de coordonnées	94
2.2.2. Fonction implicite	95
2.3. Hypersurface de \mathbb{R}^n	97
2.4. Exercices	102
2.5. Solutions	105

Partie 2. Équations différentielles ordinaires et équations hyperboliques 115

Chapitre 3. Équations différentielles ordinaires 117

3.1. Définitions et premières réductions	118
3.1.1. Réduction à une équation différentielle du premier ordre	119
3.1.2. Réduction à une équation différentielle autonome	120
3.1.3. Réduction à une équation intégrale	121
3.2. Étude du problème de Cauchy	122
3.2.1. Quelques résultats d'existence globale	129
3.2.2. Flot d'une équation différentielle	132
3.2.3. Relation de Chasles	139
3.2.4. Notions de stabilité d'un point d'équilibre	140
3.2.5. Comment trouver une fonction de Lyapunov ?	144
3.3. Équations différentielles linéaires	145
3.3.1. Stabilité asymptotique et stabilité exponentielle de l'origine	149
3.4. Compléments	156
3.4.1. Équations d'ordre n à coefficients constants	156
3.4.2. Théorème de Peano	157
3.4.3. Ensemble ω -limite et principe de LaSalle	159
3.5. Exercices	161
3.6. Solutions	174

Chapitre 4. Équations hyperboliques 205

4.1. Quelques modèles	206
4.1.1. L'équation de transport linéaire	206
4.1.2. L'équation de Burgers	206
4.1.3. L'équation du trafic routier	208

4.2. Méthode des caractéristiques pour une loi de conservation	209
4.3. Équations aux dérivées partielles quasilinéaires du premier ordre	215
4.4. Compléments	223
4.4.1. Relation de Rankine-Hugoniot	223
4.4.2. Systèmes de lois de conservation et invariants de Riemann	225
4.5. Exercices	229
4.6. Solutions	232
Partie 3. Optimisation et calcul des variations	245
Chapitre 5. Optimisation	247
5.1. Optimisation sans contraintes	247
5.1.1. Conditions locales	247
5.1.2. Convexité	254
5.1.2.1. Critères de convexité avec la différentielle première	255
5.1.2.2. Critères de convexité avec la différentielle seconde	257
5.1.3. Projection sur un convexe fermé	257
5.1.3.1. Dual d'un espace de Hilbert	261
5.1.4. Conditions suffisantes basées sur la compacité ou la convexité . .	262
5.2. Optimisation sous contraintes	264
5.2.1. Extrema liés et multiplicateurs de Lagrange	265
5.2.2. Contraintes convexes	267
5.3. Exercices	269
5.4. Solutions	271
Chapitre 6. Calcul des variations	283
6.1. Cadre mathématique	283
6.2. Équations d'Euler-Lagrange	287
6.3. Cas convexe	291
6.4. Problèmes isopérimétriques	292
6.5. Exercices	296
6.6. Solutions	299
Bibliographie	315
Index	317