Introduction

Cet ouvrage traite de quelques applications possibles des mathématiques à la philosophie. Dans un ouvrage précédent (voir (Parrochia 2018)), nous avons montré comment les philosophes, depuis la naissance de la philosophie en Grèce jusqu'à nos jours, et tout au long des développements complexes et parfois prolifiques de l'histoire de la philosophie, ont pu bénéficier des avancées mathématiques de leur temps, lesquelles les ont souvent inspirés.

Nous voulons maintenant appliquer cette conception aux mathématiques et à la philosophie d'aujourd'hui. Il nous semble que dans le grand réservoir des structures mathématiques, notamment celles rencontrées en théorie des graphes, en théorie des ordres (y compris les ordres partiels), ainsi que dans nombre de configurations algébriques ou géométriques, voire infinies, les philosophes actuels peuvent trouver des modes d'organisation nouveaux et révolutionnaires de leurs propres pensées.

Même si la lecture du présent texte suppose une certaine familiarité avec les mathématiques, nous écrivons essentiellement pour les philosophes, ou disons, pour les philosophes mathématiciens, plutôt que pour les spécialistes des domaines que nous mentionnons.

Kant, autrefois, considérait que le risque de la philosophie était d'errer dans la nature, mais qu'à l'inverse les mathématiciens ne pouvaient trouver, hors de leur domaine, ni terre qui puisse les porter, ni eau qui leur permette de nager. Tout était comme dans le chaos d'Ovide : *instabilis tellus, innabilis unda* (voir (Kant 1922, p. 582-583))[1].

1. Kant évoquait, très exactement, le fondement incertain des concepts purs transcendantaux (*instabilis tellus, innabilis unda*) en mathématiques, domaine où les mathématiciens ne savent ni se tenir debout ni nager, ne faisant que quelques pas précipités dont les vestiges sont bientôt

En fait, les mathématiques sont l'une des principales sources d'intelligibilité du réel. Mais leur rôle ne s'arrête pas là. Elles peuvent aussi fournir à la philosophie des concepts plus précis que ceux dont elle se sert ordinairement pour interpréter le monde sensible. Comme nous le verrons, les découvertes en mathématiques limitent ou contestent parfois les prétentions des doctrines passées, mais elles peuvent aussi suggérer de nouvelles manières de poser les problèmes.

Nous souhaitons d'abord illustrer ces affirmations par quelques réflexions sur certains problèmes de théorie des graphes, tels que les mathématiciens les conçoivent aujourd'hui. Nous poursuivons par quelques considérations sur les ordres, préordres et ordres partiels, puis procédons à quelques investigations plus géométriques et topologiques. Au final, nous abordons la question de l'infini et arrivons aux applications possibles dans notre domaine de quelques graphes particuliers (graphes d'incomparabilité, flous, neutrosophiques ou polyédriques).

Dans toute cette recherche, nous n'utilisons que des notations courantes et restons, la plupart du temps, aussi clairs que possible, afin de donner au lecteur philosophe des outils utiles pour développer sa propre pensée.

Commençons ici par définir ce qu'est, pour nous, un « système philosophique », c'est-à-dire l'unité fondamentale dans laquelle s'exprime la vision du monde d'un philosophe. Nous nous permettons d'insister sur ce point : l'histoire des idées ou la sociologie de la connaissance peuvent concerner les idées philosophiques. Mais l'histoire de la philosophie proprement dite s'intéresse avant tout aux « systèmes », ou, à tout le moins, aux constructions philosophiques qui doivent justifier explicitement pourquoi elles ne sont pas – ou ne peuvent pas être – des systèmes.

DÉFINITION.– *Nous appellerons « système philosophique » une théorie, exprimée dans le langage courant ou une extension saturée de celui-ci, qui tente de donner une image conceptuelle du monde conçu comme un tout, ou explique éventuellement pourquoi une telle image est impossible à construire.*

COMMENTAIRE.– La formule « exprimée dans le langage courant ou une extension saturée de celui-ci » nous permet de distinguer la philosophie de la science. Généralement, la philosophie est écrite dans une langue très proche de la langue naturelle et qui peut être lue par tout le monde. C'est le cas par exemple des dialogues de Platon, des œuvres d'auteurs français du XVIIIe siècle comme Rousseau ou Diderot, ou de cet essai de Fichte intitulé *La destination de l'homme*. Cependant, sous une forme plus

balayés (en allemand : « wo der Grund (instabilis tellus, innabilis unda) ihnen weder zu stehen, noch zu schwimmen erlaubt, und sich nur flüchtige Schritte tun lassen, von denen die Zeit nicht die mindeste Spur aufbehält »). La référence implicite renvoie à Ovide, *Métamorphoses*, I, 15 : « Utque erat et tellus illic et pontus et aer, sic erat instabilis tellus, innabilis unda, lucis egens aer. »

élaborée, la philosophie peut parfois faire appel à des concepts plus ou moins abstraits ou comporter des énoncés proches d'un langage scientifique (voir, par exemple, les *Recherches Logiques* de Husserl). L'expression « extension saturée » vient de la logique et a été introduite par Jean Ladrière (voir (Ladrière 1972))[2].

De plus, pour compléter cette distinction entre science et philosophie, il faut noter que le terme « monde » doit être interprété dans un sens plus large que le terme « univers ». On peut alors séparer la philosophie de cette branche de la physique appelée « cosmologie ». La philosophie classique est une sorte de cosmologie existentielle incluant dans sa visée les dimensions non physiques du monde. Pour un philosophe classique, l'univers ou, *a fortiori*, l'univers observé, n'est qu'une petite partie d'une entité plus vaste que le philosophe germano-suisse Karl Jaspers (1883-1969) nommait « l'englobant »[3].

Dans ce contexte, la conception philosophique classique consiste à postuler qu'il existe une correspondance :

$$\phi : W \to S$$

entre une entité métaphysique W, censée représenter le monde entier dans sa complexité[4], et un système philosophique S, qui est supposé en saisir les principales caractéristiques.

Lorsqu'un philosophe pense que cette correspondance est impossible, alors il essaie généralement de montrer que, dans un système particulier S_P écrit par un philosophe P, il existe au moins une expression linguistique x à laquelle P n'a pas donné

2. Pour faire simple et ne pas entrer dans des considérations trop techniques de la théorie des modèles, on peut dire qu'un système logique est « saturé » si tout ajout d'une thèse supplémentaire le rend contradictoire ou – s'il tolère certaines formes de contradiction en lui-même – incohérent par rapport à une opération particulière différente de la négation classique.

3. Selon Jaspers, en raison du clivage sujet-objet, qui place toujours notre conscience hors du monde des objets, l'être dans son ensemble ne peut être ni objet ni sujet. Pour ce philosophe, ce doit être précisément l'« englobant » qui se manifeste dans cette scission. Les objets comme les sujets surgissent donc sur le fond de cet « englobant » qui reste en partie obscur. Il n'est clarifié que par les objets, et il devient d'autant plus clair que les objets sont plus clairement présents à la conscience. Mais, pour autant, il ne devient pas lui-même un objet. L'« englobant » est donc au fond ce qui, par la pensée, ne fait que s'annoncer. Nous ne le rencontrons jamais lui-même, mais tout ce que nous rencontrons, nous le rencontrons en lui.

4. Cette complexité est supposée, mais on ne la connaît pas encore quand le philosophe commence son travail. Pour justifier la possibilité de cette opération, certains philosophes comme M. Gueroult ont parlé de cette entité W comme d'un « réel commun » (voir (Gueroult 1979)). D'autres ont simplement postulé qu'il y avait, en chacun, la « pensée d'un référentiel » (voir, par exemple, (Granier 1977)).

de sens et pour laquelle on ne peut donc exhiber aucune entité concrète correspondante dans W. En symboles :

$$\exists x \in S_P \mid \phi_P^{-1}(x) = \emptyset$$

COMMENTAIRE.– Suivant les suggestions de Hume, Kant fut probablement le premier philosophe à appliquer cette méthode. Il prouve, par exemple, sans ambiguïté, que nous ne pouvons avoir aucune connaissance d'entités sur lesquelles nous n'avons aucune espèce d'information (dans son langage : pour lesquelles nous ne disposons ni d'intuitions empiriques ni d'intuitions pures qui puissent être associées à leurs concepts), de sorte que les trois principaux « objets » métaphysiques nommés Dieu, le Monde et l'Âme n'ont pas de réalité correspondante dans l'expérience concrète. Wittgenstein poursuivit cette tâche dans son *Tractatus logico-philosophicus* et commença de traquer toutes les expressions linguistiques que les philosophes utilisaient de manière naïve et qui reconduisaient la même situation. Ce projet, sous des formes plus ou moins fortes, fut poursuivi par la suite par la fameuse « philosophie analytique ».

Dans cet ouvrage, nous voulons explorer la possibilité réelle de construire des philosophies d'aujourd'hui en étudiant les différentes formes d'organisations qu'elles peuvent prendre. Nous montrerons que les mathématiques offrent beaucoup d'outils pour construire des architectures conceptuelles robustes de sorte qu'on peut espérer que la philosophie systématique est, plus que jamais, possible[5].

Notre démarche repose toutefois sur plusieurs postulats qu'on peut énumérer comme suit :

– (P_1) il est possible de représenter de façon non biaisée, sous une forme unique et de dimension limitée – ce qu'on appelle un « système philosophique » –, l'essentiel de ce qui constitue notre expérience humaine globale du monde ;

– (P_2) un système philosophique est utile et même nécessaire (sinon, pourquoi perdre du temps à le construire ?) ;

– (P_3) la structure relationnelle (généralement exprimée sous forme de graphe[6]) d'un système philosophique est en quelque sorte liée à la structure relationnelle du monde. Mais la correspondance entre eux n'est pas un isomorphisme – « la carte n'est pas le territoire », comme disait Korzybski (voir (Korzybski 1933, p. 58)) – et probablement même pas un homomorphisme. Par exemple, la structure du monde peut être un graphe asymétrique, tandis que la structure du système est symétrique.

5. Ce projet ne doit pas être considéré comme une utopie ou un rêve démodé. De Whitehead à Rescher, l'idée de systématisation cognitive s'est perpétuée, et d'ailleurs, persiste dans notre vie quotidienne lorsqu'on essaie de comprendre celle-ci sous tous ses aspects.

6. Disons simplement ici, pour fixer les idées, qu'il s'agit d'un ensemble de sommets reliés par des arcs ou des arêtes, selon que le graphe est orienté ou non.

Cependant, nous demandons que le système représente sans trop de déformations les principales caractéristiques du monde dont il est censé être l'image.

Les deux premiers postulats ont un caractère méthodologique. Le dernier est clairement ontologique.

Celui-ci est probablement le plus problématique. La thèse qu'il exprime a été largement débattue, depuis le célèbre article du mathématicien et philosophe américain Randal Roy Dipert (Dipert 1997), dont nous voudrions ici dire quelques mots.

La première partie de l'article de Dipert (« les lacunes de la logique et de la métaphysique logique ») est l'une des réfutations les mieux argumentées de la philosophie analytique que l'on puisse trouver. La seconde plaide pour un « relationnalisme » bien tempéré. Mais c'est surtout la troisième (« structure, graphes asymétriques et réfutation d'Aristote ») ainsi que la quatrième partie (« le monde comme graphe asymétrique ») qui sont les plus intéressantes pour notre propos[7].

Dans la troisième partie, une fois rappelées les définitions fondamentales de la théorie des graphes (graphe simple, graphe orienté, graphe à boucles, graphe symétrique ou asymétrique, hypergraphe, etc.), Dipert se concentre alors sur des graphes structurellement différents les uns des autres, c'est-à-dire non isomorphes, dont le nombre croît selon une suite qui tend asymptotiquement vers $2^{p/2}/p!$, quand p est le nombre de leurs sommets. Mais le sous-ensemble qui l'intéresse est celui des graphes asymétriques non isomorphes et de leurs sous-graphes.

La thèse de l'auteur est que la théorie des structures formelles pures à laquelle se ramène l'empiricité est celle de ces graphes non isomorphes et asymétriques, ainsi que de leurs sous-graphes. Et le monde entier n'est, en vérité, selon Dipert, qu'un immense graphe asymétrique ayant une structure très particulière et distincte de tout autre. Contre Aristote qui, dans *Categories* 7 (8a 14-8a 37) croit réfuter le relationnalisme, Dipert prétend que l'existence de graphes asymétriques exclut toute forme de monadisme[8].

Dans la quatrième partie, deux questions cruciales sont posées : « Premièrement, est-il possible que l'univers ne soit qu'une structure formelle, et que nous ne puissions penser le monde que comme une telle structure ? Deuxièmement, est-il concevable que cette structure qu'est le monde soit simplement une structure de graphe (au sens de la théorie des graphes) ? » Les réponses à ces deux questions sont positives.

7. Le lecteur trouvera la définition complète des graphes symétriques et asymétriques dans la section 1.8.

8. « Si le monadisme strict est la position que la réalité requiert, pour une description de sa structure, l'aide de prédicats de base à une seule place, j'appellerai relationnalisme l'idée qu'elle requiert au moins une relation de base à deux places ou plus » (voir (Dipert 1997, p. 337)).

Dipert observe que ce à quoi le monde se réduit n'est pas nécessairement un graphe à un très grand nombre de sommets. Les graphes de taille moyenne (disons, entre 40 et 100 sommets) contiennent déjà beaucoup de connexions. Par exemple, un graphe de 40 sommets contient 2^{40} connexions, un nombre qui se rapproche de celui des composants de base de notre univers ou de son contenu informationnel, qui, selon certaines estimations, équivaut à peu près au nombre de graphes non isomorphes d'ordre 40.

Il y a ici un lien avec la physique et les « théories du tout » qui est le suivant : les objets physiques, y compris les particules élémentaires – qui sont, en fait, composites – ne correspondent pas à des sommets du graphe mais à des sous-graphes. La microstructure physique est en fait une macrostructure théorique du point de vue de la théorie des graphes. Quant à l'espace et au temps, ils correspondent à des trames ou grilles qui sont en fait des familles de chemins (symétriques pour l'espace, asymétriques pour le temps). Les forces, les champs et les chaînes causales sont également de tels chemins parmi les sous-graphes qui sont identifiés comme des objets physiques.

Naturellement, l'esprit et ses pensées doivent avoir leur place dans ce graphe, qui comporte donc en lui-même une sorte de structure-miroir : comme l'écrit Dipert, les pensées qui « portent sur un phénomène s'y réfèrent si elles occupent une certaine place dans le graphe du monde (dans un "esprit") et partagent certaines caractéristiques structurelles avec l'objet pensé. Une pensée, par impossibilité, concerne parfaitement un objet quand sa structure graphique interne est la même que celle de l'objet, et quand l'objet occupe un emplacement dans le système de tous les objets qui est comme la position de la pensée dans le système des pensées (de cet esprit) » (Dipert 1997, p. 357).

On pourrait alors imaginer que, dans une telle théorie, il n'y a pas de place pour les esprits, la conscience et d'autres phénomènes mentaux, à moins que, justement, tout ne soit que mental, ce que finalement, Dipert suivant en cela Leibniz, plutôt que Spinoza ne peut entièrement exclure, car les sommets du graphe, après tout, pourraient être seulement des *feelings* (c'est-à-dire des perceptions ou des façons de sentir).

Cet article remarquable a sûrement déclenché l'hostilité de nombre de philosophes, en tout cas de ceux qui préfèrent la matière aristotélicienne aux structures formelles et l'illusion subjective aux relations objectives dépeintes dans ce graphe apparemment froid et donc dépourvu de chaleur humaine. Mais l'objection la plus forte, développée dans un court article d'Oderberg (voir (Oderberg 2011, p. 6-9)), a reposé sur un argument mathématique que Shackel (Shackel 2011, p. 11) a très bien résumé comme suit :

1) supposons que le monde soit un graphe ;

2) si c'est un graphe, alors c'est un graphe asymétrique ;

3) tout graphe asymétrique peut être transformé en graphe symétrique par la suppression d'arêtes ;

4) la perte d'un sous-ensemble d'arêtes du monde (en particulier, la perte de toutes celles qui ne font pas partie d'un sous-graphe symétrique, perte consécutive à la disparition de certains nœuds) entraîne métaphysiquement la non-existence du monde dans sa globalité (1, 2, 3) ;

5) par conséquent, le monde n'est pas un graphe (1, 4, *reductio ad absurdum*).

En fait, cet argument mathématique est assez spécieux : pourquoi imaginer que le graphe asymétrique du monde puisse devenir symétrique ? Comme l'écrit Shackel, « il est impossible que le graphe mondial soit différent de ce qu'il est, et donc, tout changement implique sa non-existence » (Shackel 2011, p. 13), donc l'objection d'Oderberg n'est pas un argument valable : « Il est impossible de se débarrasser des nœuds et des arêtes du monde, de sorte que l'argument absurde de sa supposée inexistence est, *ipso facto*, bloqué » (Shackel 2011, p. 14).

Il n'en reste pas moins que le caractère nécessaire de la structure de Dipert peut sembler gênant. On pourrait alors vouloir introduire de la virtualité en lui. Cependant, réduire les propriétés à de simples possibilités potentielles, comme Bird a pu le proposer dans un autre modèle (voir (Bird 2007)), ne résoudrait pas le problème selon Oderberg. Car s'il n'y a que du potentiel et pas d'actualisation, alors rien ne peut vraiment se manifester, ainsi qu'il l'explique dans un autre article (voir (Oderberg 2012)). Cela dit, comme le montre Shackel, il existe des graphes d'activités (*potency graphs*) pour lesquels un processus de diffusion actualise progressivement tous les potentiels ou certains d'entre eux. Le phénomène fait « boule de neige » et on peut démontrer que, dans ce type de graphes (*snowflake graphs*), on peut toujours choisir un nœud à partir duquel tous les potentiels peuvent être actualisés.

En conclusion, le graphe de Dipert est parfaitement plausible et cette possible réduction du monde à un graphe permet aussi de fonder en quelque sorte ontologiquement les tentatives de représentation du monde mises en place par les philosophes au cours du temps. Même dans le cas où on en rejette le bien-fondé, on ne peut toutefois nier que ces tentatives puissent être décrites méthodologiquement à l'aide du formalisme de la théorie des graphes. Nous n'avons donc absolument pas besoin de l'hypothèse P_3 pour justifier ce qui suit.

Cependant, si l'on accepte de considérer le monde comme un graphe, alors, si le monde est fini, il y a de fortes chances pour que son graphe soit asymétrique. En effet, la proportion de graphes à n sommets avec des automorphismes non triviaux tend vers zéro lorsque n tend vers l'infini, ce qui signifie de manière informelle que presque tous les graphes finis sont asymétriques. En revanche, presque tous les graphes infinis sont symétriques (par exemple, les graphes aléatoires infinis dénombrables du modèle Erdös-Rényi sont, avec une probabilité égale à 1, isomorphes au graphe de Rado hautement symétrique (voir (Erdös et Szekeres 1935))).

En utilisant tout au long de ce texte le langage des graphes, des ordres, de l'algèbre ou de la topologie (et parfois des considérations mathématiques sur l'infini), nous essaierons de représenter mathématiquement cette entité que Jaspers appelait « l'englobant », et qu'il pensait, par définition, impossible à objectiver.

En réalité, les mathématiques nous ont souvent appris qu'il est possible d'obtenir de bonnes caractérisations d'un objet sans avoir à le considérer à partir d'une quelconque extériorité. Comme l'a montré Gauss dans le cas des surfaces (*theorema egregium*), il est très remarquable que la courbure d'un objet géométrique puisse être décrite intrinsèquement, c'est-à-dire sans aucune référence à un « espace de plongement » dans lequel l'objet en question serait situé. Par exemple, le fait qu'une sphère ordinaire soit une surface à courbure positive constante est complètement indépendant du fait que nous voyons habituellement cette sphère comme étant immergée dans notre espace euclidien tridimensionnel. La courbure de cette sphère pourrait très bien être mesurée par des êtres intelligents bidimensionnels vivant sur la sphère (sortes de « fourmis bidimensionnelles »), et cela à partir de mesures de longueurs et d'angles effectuées à même la sphère.

Il faut imaginer que nous sommes, par rapport à l'englobant, dans la même situation que les fourmis bidimensionnelles par rapport à la sphère. En principe, rien ne doit nous empêcher de pouvoir le décrire si nous disposons des informations suffisantes.