Introduction

Henri Poincaré et la relativité, présentation

L'objectif de cet ouvrage est de permettre au lecteur d'avoir accès, à partir des textes originaux, au contenu et à l'esprit de la contribution scientifique de Henri Poincaré (29 avril 1854-17 juillet 1912) à ce que l'on appelle aujourd'hui la « théorie de la relativité restreinte ». Cette contribution, résumée brièvement ci-après, est en effet souvent ignorée, notamment dans les livres d'enseignement de la relativité, ou mal comprise, car très différente de l'approche einsteinienne ; elle est aussi souvent confondue avec les écrits grand public, à visée historique, pédagogique et philosophique, du célèbre savant. Pour mieux l'apprécier et comprendre l'esprit qui y a présidé, il convient de préciser auparavant ce que l'on entend aujourd'hui en physique par l'idée de relativité, avec notamment sa part mathématique qui lui est constitutive ; on rappellera aussi les conditions dans lesquelles Poincaré, réputé pour ses apports aux mathématiques, a été amené à publier des articles sur la relativité en 1900 et 1905, puis à y revenir dans son avant-dernière conférence en mai 1912.

Annotées et précédées d'introductions détaillées, les interventions suivantes font respectivement l'objet des parties 1, 2 et 3 de cet ouvrage :

– « La théorie de Lorentz et le principe de réaction » en 1900 (Poincaré 1900) ;

– « Sur la dynamique de l'électron » en 1905 (Poincaré 1905a, 1906) ;

– *L'espace et le temps* en 1912 (Poincaré 1913a).

I.1. Physique et relativité

S'il fallait qualifier la physique moderne en peu de mots, on pourrait dire que, outre le fait d'être bien sûr une science expérimentale, elle est « relativiste », ce dont Poincaré prend pleinement conscience dès 1895 (voir chapitre 1) et « quantique », ce qu'il n'a pu qu'entrevoir (voir chapitre 6) en raison de son décès brutal en 1912. Par « relativiste », on entend aujourd'hui qu'on comprend mieux la nature des grandeurs physiques et les lois qui les impliquent, en adoptant des « points de vue » différents, bien que paradoxalement équivalents, car reliés entre eux par un groupe de symétrie.

I.1.1. *« Le mouvement est comme rien »*

Ces « points de vue », ce sont les référentiels imaginés par Galilée dans une discussion célèbre entre Salviati et Sagredo dans les *Dialogo* (Galileo 1632) et appelés aujourd'hui référentiels inertiels ou galiléens. Ils se caractérisent par l'équivalence des lieux et orientations dans l'espace (et dans le temps par celle des instants)[1] et ils se distinguent les uns des autres par un mouvement relatif uniforme (à vitesse constante). « Le mouvement est comme rien », disait Galilée, ce qu'on traduit maintenant par l'invariance (indépendance) des lois physiques vis-à-vis de ces référentiels (d'où leur équivalence), ou par l'impossibilité de mettre en évidence leur mouvement si on ne dispose que d'expériences ou d'observations « internes ».

C'est par exemple le cas, avec une très bonne approximation, du mouvement orbital de la Terre (à environ $30\ \mathrm{km.s}^{-1}$ autour du Soleil), exemple qui a certainement inspiré Galilée dans son rejet des conceptions aristotéliciennes[2]. Cet exemple a été reconsidéré au XIXe siècle quand les physiciens ont cherché, sans succès, à déterminer la vitesse « absolue » V de la Terre dans l'espace (ou par rapport à l'éther) à l'aide d'expériences nombreuses mettant en jeu des phénomènes optiques puis électromagnétiques, à commencer par l'expérience du prisme d'Arago dans les années 1810 (Arago 1853) et sans oublier la plus célèbre, l'expérience interférométrique de Michelson (Michelson 1881 ; Michelson et Morley 1887). C'est l'interprétation de ces échecs essentiellement par Hendrik Antoon Lorentz en 1895 et en 1904 (Lorentz 1895, 1904), par Poincaré en 1900 et 1905 (Poincaré 1900, 1905a, 1906), et par Einstein en 1905 (Einstein 1905a ; Stachel 2005), qui a conduit à la théorie de la relativité restreinte, théorie encore valable aujourd'hui, même en physique quantique, si l'on fait fi de la gravitation. Enfin, la Terre étant en chute libre sous l'influence gravitationnelle du Soleil, comme l'a montré Isaac Newton (Newton 1687), l'équivalence des référentiels inertiels est devenue, de fait, une équivalence locale des référentiels en chute libre qui, dans les mains d'Einstein entre 1912 et 1915, a conduit à ce qu'il a appelé la « relativité générale » (voir par exemple les *Collected Papers of Albert Einstein* (CPAE) (Janssen 2007b ; Darrigol 2022))[3]. Avec la physique quantique, l'idée d'équivalence

1. Galilée ne commente pas l'homogénéité du temps, qui ne se pose pas pour lui.

2. Schématiquement, selon Aristote, le repos est l'état naturel des corps et le mouvement est le résultat d'actions extérieures.

3. Le qualificatif « générale » se rapporte à l'invariance des lois vis-à-vis des changements arbitraires de coordonnées d'espace-temps. Mais dans cette théorie (voir par exemple (Ohanian

locale a été étendue aux autres interactions (électromagnétisme avec Hermann Weyl et Fritz London en 1930 et « modèle standard » aujourd'hui) en l'appliquant aux états quantiques de la matière (fonctions d'onde, particules élémentaires).

Si la physique est la même dans tous les référentiels inertiels, on peut douter de l'intérêt de changer de référentiel. C'est pourtant l'observation de leur équivalence qui a probablement amené Galilée à penser que la vitesse d'un corps n'est pas la grandeur cinématique fondamentale et qui l'a conduit, avec ses expériences sur la chute des corps, à accorder (implicitement) un rôle important à l'accélération. Cette grandeur (invariante en raison de l'universalité implicite du temps, voir note de bas de page 7), qu'il a associée aux effets de la pesanteur, a été reliée ensuite aux notions de force et de masse (René Descartes, Christian Huygens, Newton, etc.). Mais comme la loi bien connue :

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

de la mécanique newtonienne reliant force, masse et accélération, avec des forces instantanées à distance, ne fait intervenir que des quantités invariantes, et comme aussi un changement de référentiel inertiel est une affaire triviale comparée à d'autres changements plus importants à étudier en pratique[4], les physiciens, après Newton, sont restés pour l'essentiel sur l'hypothèse de l'existence d'un temps et d'un espace absolus.

Avec le développement de l'électromagnétisme, l'éther, pensé comme milieu de propagation de la lumière (à la vitesse c de l'ordre de $300\ 000\ \mathrm{km.s}^{-1}$), puis ensuite plus généralement pensé comme siège des phénomènes électromagnétiques, est apparu comme un candidat possible pour cet espace. Aussi, quand, pour expliquer le résultat négatif de l'expérience du prisme d'Arago, Augustin Fresnel (qui raisonne dans l'éther) introduit en 1818 (Fresnel 1818) une loi de composition inhabituelle de la vitesse V du prisme et de la vitesse c/n de la lumière dans le prisme[5] :

$$v = c/n + V(1 - 1/n^2)$$

---

et Ruffini 2013)), l'espace-temps « local » d'un système en chute libre reste pour l'essentiel celui de la relativité restreinte.

4. Les référentiels non inertiels, par exemple en rotation, sont importants en pratique car l'équation de la dynamique met alors en jeu des forces supplémentaires dites d'inertie (force centrifuge, force de Coriolis) responsables de nouveaux effets. C'est ainsi que l'expérience du pendule de Foucault, en 1851 à l'intérieur du Panthéon à Paris, met en évidence la rotation de la Terre sur elle-même.

5. La loi de composition « galiléenne » de vitesses parallèles est : $v = v_1 + v_2$ (ici $v_1 = c/n,\ v_2 = V$). La formule de Fresnel a été vérifiée par Hippolyte Fizeau dans une expérience d'interférences dans laquelle la lumière parcourt deux conduits remplis d'eau s'écoulant aux vitesses V et $-V$ (Fizeau 1851).

ou quand Lorentz en 1895, pour ramener l'étude de l'électromagnétisme des corps en mouvement à la vitesse V dans l'éther à celle des corps au repos, introduit le changement de variables[6] :

$$x' = x - Vt, \quad t' = t - Vx/c^2, \quad y' = y, \quad z' = z$$

(que l'on désignera dans cet ouvrage par transformation de Lorentz (TL) de 1895), ce ne sont pas les transformations galiléennes familières décrivant une translation proportionnelle au temps (absolu) écoulé :

$$x' = x - Vt,\ t' = t,\ y' = y,\ z' = z$$

et la loi de composition galiléenne des vitesses (addition simple), qui sont remises en cause[7]. Les physiciens, à la suite de Fresnel, parlent plutôt d'entraînement partiel de l'éther par la matière à la vitesse $V(1 - 1/n^2)$, et Lorentz pense que le temps t' est une variable fictive, contrairement au temps vrai désigné par t.

En somme, à l'aube du XX^e^ siècle, l'idée de relativité ne fait pas vraiment partie du corpus théorique des physiciens (contrairement à celle de l'éther), même si Poincaré essaie d'en convaincre Lorentz dans son article de 1900 dédié à sa théorie. Il faudra pour cela qu'Einstein déduise explicitement les bonnes transformations (celles de Lorentz de 1904) de l'invariance de la vitesse c de la lumière et d'une problématique de la mesure des intervalles de temps. Pourtant, d'un point de vue moderne (mathématique), l'essentiel de la relativité restreinte est présent dans les TL de 1895 ci-avant (Provost et Bracco 2016). Il n'y manque en fait que l'idée de « groupe de transformations », dont les géomètres n'ont pris pleinement conscience que dans les années 1870.

I.1.2. *Le statut mathématique (géométrique) de la relativité*

Si l'équivalence des référentiels inertiels pour la description des phénomènes tient une part importante dans l'idée de relativité, elle a besoin d'être précisée mathématiquement, comme l'ont été d'autres idées fondamentales au coeur de la physique, par exemple celle de taux de variation temporelle des grandeurs à l'aide du calcul différentiel (Blay 1999, 2002).

6. Ce changement est valable à l'ordre V/c, donc à la précision 10^{-4}. Les TL de 1895 peuvent être vues comme la version infinitésimale des TL (de 1904) connues aujourd'hui.

7. Pour des vitesses selon l'axe x cette transformation conduit à $v' = v - V$ (d'où la loi de composition $v = v' + V$) et aux invariances $a' = a$ pour les accélérations et $F' = F$ pour les forces.

En effet, beaucoup de grandeurs physiques, à commencer par celles qui impliquent la vitesse des corps considérés, comme par exemple les champs électrique et magnétique dûs à une charge électrique en mouvement, dépendent *a priori* du référentiel. L'énoncé des lois, ou leur prédiction, nécessite donc, pour vérifier leur invariance, la connaissance des « transformations » de ces grandeurs dans un changement de référentiel, ainsi que l'examen de la « compensation »[8] faisant apparaître la loi (relation mathématique entre les grandeurs) comme inchangée. Cette remarque ne fait que généraliser une condition bien connue en physique selon laquelle la définition d'une grandeur, ou une égalité entre grandeurs dans un référentiel, doit respecter leur caractère scalaire ou vectoriel ; ce caractère précise leur loi de transformation vis-à-vis des rotations dans l'espace (rotations du système physique qui porte la grandeur ou du système de coordonnées qui sert à l'évaluer)[9]. Comme cette condition traduit mathématiquement l'invariance rotationnelle des lois physiques, il convient donc de considérer pareillement les changements de référentiels inertiels et les rotations des systèmes de coordonnées (ainsi que les translations des origines d'espace et de temps choisies). Ces changements donnent en effet tous lieu à des transformations sur les coordonnées d'espace-temps laissant invariantes les lois de la physique.

Quand, de façon imagée, Galilée caractérise dans les *Dialogo* le mouvement inertiel d'un bateau par l'équivalence des lieux et des directions, il ne fait pas référence explicitement comme aujourd'hui aux translations et aux rotations en tant que transformations ; mais il sous-entend clairement que l'espace d'un tel référentiel relève de la géométrie d'Euclide dans laquelle ces transformations (avec les dilatations) sont à la base du raisonnement sur les figures (et des notions géométriques de droite, distance, angle, parallèlisme, orthogonalité, etc.). Après Euclide, les mathématiciens ont introduit de nombreuses géométries, notamment la géométrie projective au XVII^e^ siècle (Girard Desargues, Blaise Pascal)[10] et les géométries non euclidiennes dans la

8. La « compensation » est un terme probablement employé dans ce cadre pour la première fois par Fizeau à propos de l'expérience d'interférences de Babinet de 1839, juste après avoir résumé la démarche de Fresnel. Il est souvent repris par Poincaré.

9. Une translation, une rotation, plus généralement une transformation sur un système physique dans un référentiel est dite « active ». La même transformation sur le système de coordonnées sans toucher au système physique est dite « passive ». Ces deux points de vue sur les transformations (Provost *et al.* 2019) conduisent à deux approches équivalentes de l'idée de relativité. L'analogue « actif » d'un changement de référentiel galiléen est la « mise en mouvement global » (boost) d'un système physique dans le référentiel considéré.

10. À l'origine, la géométrie projective s'intéresse (par exemple pour la peinture) aux projections que l'on peut faire dans l'espace d'un plan sur un autre à partir d'un centre de projection (centre de visée). Analytiquement, les transformations projectives du plan sont définies par $x' = (ax+by+c)/(\alpha x+\beta y+1)$, $y' = (dx+ey+f)/(\alpha x+\beta y+1)$. Elles conservent l'alignement des points, l'intersection de droites (éventuellement à l'infini), la propriété de conique, etc., autant de propriétés géométriques laissées invariantes. Par contre, les notions d'angle et de

première moitié du XIX[e] siècle (Carl Friedrich Gauss, Jànos Bolyai, Nicolaï Lobatchevski, Bernhard Riemann)[11], géométries nécessitant l'introduction d'autres transformations comme instruments de démonstration (voir par exemple (Russo 1997 ; Dubrovin *et al.* 1984)). Mais l'idée que la loi de composition de ces transformations (au lieu de leur écriture analytique) caractérise avec l'espace sur lequel elles agissent une géométrie n'a été formalisée qu'en 1872, avec le programme de recherche d'Erlangen de Felix Klein (Klein 1872). Ce programme a fait suite à la diffusion en 1870 du *Traité des substitutions et des équations algébriques* de Camille Jordan qui reprenait les travaux d'Evariste Galois et son introduction de la notion de groupe[12]. Peu après, Sophus Lie démontrait qu'un groupe dépendant continûment de paramètres est connu à travers ses éléments infiniment proches de l'identité, et la théorie des groupes (leur classification, leurs représentations, leurs liens à des espaces fonctionnels, etc.) devenait un domaine important des mathématiques, touchant à l'algèbre et à l'analyse.

En 1880, à l'occasion d'un concours pour le grand prix des sciences mathématiques, Poincaré s'intéresse à la résolution des équations différentielles à coefficients algébriques (Darboux 1913). Il est alors conduit à introduire de nouvelles fonctions transcendantes (qu'il appelle « fuchsiennes » (Tazzioli 2010), du nom du mathématicien Lazarus Fuchs) généralisant, pour le disque unité, les fonctions doublement périodiques dans le plan complexe[13]. Soudain (dira-t-il), il découvre « sans que rien dans mes pensées antérieures paraît m'y avoir préparé que les transformations dont j'avais

distance n'ont plus de sens dans cette géométrie. La géométrie euclidienne du plan correspond à : $\alpha = \beta = 0,\ a = e = \cos\theta,\ b = -d = \sin\theta$ (invariance de la métrique $dx^2 + dy^2$).

11. Jusqu'au XIX[e] siècle, des géomètres ont cherché, en vain, à déduire l'axiome des parallèles des autres axiomes de la géométrie d'Euclide. En 1830 Lobatchevski envisage la possibilité de mener par un point extérieur à une droite, non pas une, mais deux droites parallèles (qui ne s'en écartent pas à l'infini), et il construit une géométrie à trois dimensions sans contradiction apparente. Elle n'a pleinement été acceptée que lorsqu'en ont été donnés des modèles « euclidiens » (Klein, Eugenio Beltrami, Poincaré, etc.). Un exemple est l'intérieur de la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ sur lequel agissent les transformations projectives (à trois dimensions) qui conservent la sphère ; les droites sont les segments intérieurs AB et les points à l'infini A, B sont ceux de la sphère (d'où la possibilité par un point M extérieur à AB de mener deux parallèles MA et MB). On sait aujourd'hui que cet espace n'est autre aussi que l'espace des vitesses (en unité de c) des corps massifs de la relativité restreinte.

12. Rappelons qu'un groupe est un ensemble d'éléments qui admet une loi de composition interne associative et inversible. La décomposition du groupe des substitutions de n éléments en sous-groupes est au coeur de l'analyse de Galois de 1832 pour savoir si une équation algébrique de degré n est soluble par radicaux (Verdier 2003 ; Ehrhardt 2007). Arthur Cayley applique la notion de groupe à la géométrie à partir de 1854.

13. Le « disque de Poincaré » $|z| < 1$ du plan complexe est un modèle de géométrie de Lobatchevski sur lequel agissent les transformations $z \longrightarrow (az+b)/(\bar{b}z+\bar{a})$ ($|a|^2 - |b|^2 = 1$) qui conservent le cercle $|z| = 1$ et la métrique $4(1-|z|^2)^{-2}|dz|^2$ (Ghys 2005). Les « lignes droites » (géodésiques) sont les trajectoires circulaires et rectilignes orthogonales à ce cercle.

fait usage étaient identiques à celles de la Géométrie non euclidienne ». Peu de temps après, il fera un constat semblable « avec le même caractère de brièveté, de soudaineté et de certitude immédiate » pour les « transformations arithmétiques des formes quadratiques indéfinies » ($Q = x^2 + y^2 - z^2$, forme laissée invariante par le groupe hyperbolique SO(2,1)).

Il n'est donc pas étonnant que Poincaré, qui a suivi ces travaux et y a contribué, par exemple en 1881 dans son étude des fonctions fuchsiennes en liaison avec les sous-groupes discrets du groupe hyperbolique SO(2,1), reconnaisse en 1905 dans les travaux de Lorentz la présence d'un groupe de symétrie (qu'on appelle aujourd'hui à la suite de Poincaré « groupe de Lorentz » SO(3,1)). Ce groupe, dans son action sur les coordonnées d'espace-temps, laisse invariante la forme quadratique :

$$c^2t^2 - x^2 - y^2 - z^2$$

et, si on y joint les translations d'espace et de temps, laisse invariant la métrique $c^2dt^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2$. Ce dernier groupe (ISO(3,1), appelé « groupe de Poincaré ») est toujours d'actualité en physique, mais pas seulement en vertu de son action sur les coordonnées d'espace-temps et sur les grandeurs mécaniques. Comme en physique quantique les espaces des états d'un système sont des espaces vectoriels, les représentations (modes d'action) du groupe dans ces espaces ont fait apparaître de nouveaux modes de transformation, les lois de composition restant inchangées[14] ; elles ont donné lieu à de nouvelles équations de propagation invariantes, par exemple l'équation de Dirac (Dirac 1928a, 1928b) pour une particule libre massive. Enfin, les équivalences locales mentionnées ci-avant et servant à introduire la gravitation ainsi que les interactions électromagnétique, faible et forte, font elles aussi appel à la théorie des groupes dans leur formulation mathématique, connue en physique sous le nom de théories de jauge[15]. La théorie des groupes, en lien avec l'idée de relativité, est donc aujourd'hui au centre de la physique théorique.

Ce disque peut être vu aussi comme la projection sur le plan xOy à partir du point $(0, 0, -1)$ du demi-hyperboloïde $Q = x^2 + y^2 - z^2 = -1$, $z > 0$, muni de la métrique $dx^2 + dy^2 - dz^2$.

14. Parmi ces nouveaux modes, on peut notamment citer : les états « onde plane » comme modes de transformation relatifs aux translations d'espace-temps d'un système quantique isolé et les états « spineurs » (vecteurs complexes à deux dimensions) qui sont à la base de toutes les représentations considérées en physique du groupe de Lorentz.

15. Dans ces théories (voir par exemple (Le Bellac 1988 ; Maggiore 2005 ; Penrose 2007 ; Provost *et al.* 2019)), la comparaison d'états quantiques en des points d'espace-temps voisins se fait à l'aide de transformations infinitésimales de groupes de symétrie (symétries internes pour le modèle standard). Ces transformations, qui dépendent du point considéré, font intervenir les champs d'interaction auxquels sont associées des particules (photon, bosons W^+, W^-, Z_0 et gluons pour le modèle standard). La relativité générale d'Einstein peut être vue aussi comme une théorie de jauge associée au groupe de Lorentz, les référentiels inertiels locaux n'étant au fond que des états classiques idéalisés de la matière.

I.2. Henri Poincaré : physicien théoricien, enseignant et philosophe

« Mathématicien hors de pair, physicien pénétrant et profond philosophe », c'est ainsi que Gaston Darboux, mathématicien et secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences, présente dans son *Éloge historique d'Henri Poincaré*[16] (Darboux 1913) les « mérites de celui dont le cerveau puissant avait manifesté tant d'aptitudes diverses ».

I.2.1. *Poincaré physicien théoricien et enseignant*

Considéré comme l'égal de Gauss pour les mathématiques et savant universaliste comme lui (Dieudonné 1987), Henri Poincaré est aujourd'hui moins célèbre comme physicien théoricien (« théoricien de la physique » écrivait Louis de Broglie[17]). Pourtant, ses travaux vers 1890 sur le problème des trois corps, dont Karl Weierstrass disait déjà qu'ils « ouvriront une ère nouvelle dans le domaine de la mécanique céleste », ont été considérés par la communauté scientifique dans les années 1960 comme fondateurs de la théorie des systèmes dynamiques et de la notion de chaos déterministe[18]. Dans un tout autre domaine, c'est le nom de « groupe de Poincaré » que donneront au groupe de symétrie de la physique des particules les physiciens engagés dans les théories quantiques relativistes[19] en hommage à sa contribution de 1905 à la théorie de la relativité. Sait-on que la Société française de physique l'a choisi comme président en 1902, ou que jusqu'à sa mort en 1912, à l'âge de 58 ans, il a été le candidat

16. L'éloge est lu lors de la séance publique annuelle le 15 décembre 1913. Poincaré était membre de l'Académie depuis 1887 (section Géométrie) avant d'en devenir président en 1906.

17. Voir l'introduction du tome IX « Physique mathématique » des *Oeuvres* de Henri Poincaré (Poincaré 1954).

18. Poincaré s'intéresse alors à la stabilité du système solaire. Ses travaux, couronnés par le Grand Prix du roi de Suède en 1889, concernent la perturbation des systèmes hamiltoniens intégrables et l'existence de séries non convergentes (asymptotiques) pouvant néanmoins représenter des solutions valables sur des temps astronomiques. Ils seront repris notamment par Andreï Kolmogorov, Vladimir Arnold et Jürgen Moser à l'origine du « théorème KAM » (Arnold 1980 ; Cercignani 1998). Poincaré a publié trois tomes sur les *Méthodes nouvelles de la mécanique céleste* (Poincaré 1892, 1893, 1899). Les liens entre dynamique chaotique et disque de Poincaré (voir note de bas de page 13) sont discutés dans (Damour 2005a). Poincaré est aussi à l'origine, avec sa *Note sur les propriétés des fonctions définies par les équations différentielles* (Poincaré 1878) et sa thèse intitulée « Sur les propriétés des fonctions définies par les équations aux différences partielles » (Poincaré 1879), de la théorie des bifurcations des solutions d'équations différentielles et de l'introduction des formes normales (Arnold 1986 ; Ekeland 1984).

19. Le groupe de Poincaré ISO(3,1) est engendré par les translations d'espace-temps et le groupe de Lorentz SO(3,1). En 1939, Eugène Wigner classifie ses représentations unitaires et les applique à la physique des particules (Wigner 1939). Une particule est caractérisée par sa masse et son moment cinétique (quantifié), et si la masse est nulle, par son hélicité (moment cinétique dans la direction de la propagation, relié à la notion de polarisation pour la lumière).

le plus nominé pour le prix Nobel de physique ? Peut-être se rappelle-t-on, grâce à une célèbre photographie prise au *Congrès Solvay* de 1911 consacré aux quanta et présidé par Lorentz, qu'il siège aux côtés des plus célèbres physiciens comme James Jeans, Heike Kamerlingh Onnes, Walter Nernst, Max Planck, Ernest Rutherford, Arnold Sommerfeld, Wilhelm Wien et le jeune Einstein, ou pour la France Marie Curie, Marcel Brillouin, Maurice de Broglie, Paul Langevin et Jean Perrin.

Poincaré a bien sûr contribué, dans la lignée de Augustin Cauchy, Johann Dirichlet, Carl Neumann, etc., à la résolution des principales équations aux dérivées partielles de la physique mathématique, avec l'introduction de méthodes qui serviront à Ivar Fredholm pour les équations intégrales. Il publie notamment en 1894 un mémoire *Sur les équations de la physique mathématique* (Poincaré 1894a) où il étend les travaux de Hermann Schwarz et Émile Picard sur les harmoniques des membranes, et en 1895 un autre, *Sur la méthode de Neumann et le principe de Dirichlet* (Poincaré 1895a), où il invente la méthode du balayage, une autre façon d'introduire en particulier les potentiels retardés dans la résolution de l'équation de propagation.

Mais il s'est également confronté aux situations concrètes qui accompagnaient ces équations (Samueli et Boudenot 2015). C'est ainsi qu'il s'est intéressé aux multiples questions mathématiques touchant à la jeune télégraphie sans fil, ou à la polarisation de la lumière induite par la diffraction quand on tient compte de la nature des parois (travail continué par Arnold Sommerfeld) ; il a expliqué à Heinrich Hertz lui-même (Walter *et al*. 2007), qui lui en sera reconnaissant, les raisons pour lesquelles aux basses fréquences il ne retrouvait pas pour ses ondes (« hertziennes ») dans l'air la valeur de la vitesse de la lumière et pourquoi les expériences des Suisses Edouard Sarasin et Auguste de la Rive étaient plus pertinentes (Darrigol 2000). Dans une lettre à Gaston Darboux qui lui demandait de commenter ses travaux en physique en vue d'un rapport pour le prix Nobel, Poincaré consacre même un paragraphe à « l'électrotechnique », déclarant notamment : « j'ai mis en évidence le rôle des contacts glissants dans les phénomènes dits d'induction unipolaire sur lesquels les techniciens discutaient à perte de vue » ; ou citant son apport à l'analyse des machines autoexcitatrices. Il a aussi contribué à l'étude de la stabilité des systèmes non linéaires oscillants (Ginoux 2011) et à celle des figures d'équilibre des masses fluides en rotation (Walter *et al*. 2016).

Poincaré n'hésitait pas non plus, à travers ses conférences, articles ou échanges épistolaires avec les plus grands savants, à donner son point de vue sur des découvertes récentes comme les rayons cathodiques, les rayons X ou la radioactivité en liaison avec l'explication des aurores boréales, de la fluorescence ou du rythme de refroidissement de la Terre[20]. Comme avant lui Joseph-Louis Lagrange et Pierre-Simon Laplace, il devient membre (en 1893) et président (en 1899) du Bureau des longitudes,

20. Voir son ouvrage *Leçons sur les hypothèses cosmogoniques* (Poincaré 1911a).

une institution qu'il considérait comme le point de convergence de la science et des techniques (astrométriques, géodésiques, etc.).

Si Poincaré s'intéresse de si près à la physique, c'est qu'il a été amené à l'enseigner. Il est nommé en 1886 à la chaire de physique mathématique et calcul des probabilités à la Sorbonne, avant d'occuper la chaire d'astronomie et de mécanique céleste à partir de 1896. Ses cours, toujours renouvelés, sont publiés et deviennent des ouvrages de référence que l'on retrouve dans les bibliothèques universitaires et les grandes écoles de très nombreux pays. C'est ainsi que paraissent en 1889 et 1892 les tomes 1 et 2 de ses *Leçons sur la théorie mathématique de la lumière* (Poincaré 1889-92), puis *Électricité et Optique* en deux volumes également (Poincaré 1890-91), immédiatement traduits en allemand sous l'impulsion de Hermann Helmholtz à Berlin, le second volume détaillant les expériences de Hertz avant même que celui-ci ne publie son livre en 1892 ; *Électricité et Optique* sera réactualisé et publié début 1901 (Poincaré 1901), suite à ses cours de 1899, dont l'article de 1900 dédié à Lorentz peut être considéré comme un prolongement. Ensuite paraissent *Thermodynamique* (Poincaré 1892b), les *Leçons sur la théorie de l'élasticité* (Poincaré 1892c), *Théorie des tourbillons* (Poincaré 1893b), *Les oscillations électriques* (Poincaré 1894b), premier ouvrage sur la télégraphie sans fil, *Capillarité* et *Théorie analytique de la chaleur* (Poincaré 1895b, 1895c), et *Théorie du potentiel newtonien* (Poincaré 1899b) ; en tout, près de trois mille cinq cents pages que Poincaré consacre à l'enseignement de la physique dans ces différents domaines.

La caractéristique des cours de Poincaré est de présenter un inventaire approfondi et critique des théories passées et présentes, et lorsque les questions sont loin d'être tranchées, comme en électrodynamique avec les théories de James Clerk Maxwell, Helmholtz, Hertz, Joseph Larmor, Lorentz, etc., de confronter ces théories, non seulement aux expériences, mais aussi entre elles à l'aune des grands principes qui régissent la physique. Par exemple, Poincaré en 1895 apprécie dans la théorie de Hertz (Hertz 1892) sa conformité au principe d'action-réaction de la mécanique et dans celle de Lorentz (Lorentz 1892) son approche microscopique des diélectriques et son explication de l'expérience de Fizeau concernant la vitesse de la lumière dans des milieux en mouvement (voir note de bas de page 5).

En 1900, dans « La théorie de Lorentz et le principe de réaction » (Poincaré 1900), il adopte finalement, en la réinterprétant, cette dernière après avoir saisi toute l'importance, pour une nouvelle relativité, du « temps local » que Lorentz a introduit en 1895 (voir partie 1).

C'est encore un article de Lorentz, en 1904, qui l'amène en 1905 à préciser dans « Sur la dynamique de l'électron » (Poincaré 1905a, 1906) l'essence mathématique de l'idée de relativité (voir partie 2).

C'est aussi le lien profond entre « relativité de Lorentz » et géométrie qui sera l'objet de son avant-dernière conférence à l'Université de Londres en mai 1912, *L'espace et le temps* (Poincaré 1913a) (voir partie 3).

Poincaré, qui aime examiner de manière comparative et critique les travaux des physiciens, aura moins l'occasion de se consacrer à ceux de Ludwig Boltzmann sur la théorie cinétique des gaz et l'irréversibilité thermodynamique (Boltzmann 1902-1905)[21]. Mais, bien qu'ayant prouvé en 1889 qu'on ne peut concilier cette irréversibilité et la mécanique hamiltonienne[22], et en 1890 que tout monde borné régi par les lois de cette mécanique repasse toujours arbitrairement près de son état initial[23], il reconnaîtra les avancées apportées par Boltzmann ; en 1906, il relie la croissance observée de l'entropie à une réduction macroscopique permanente que l'on fait de l'entropie microscopique (constante, elle, en vertu d'un théorème de Joseph Liouville).

De même, il n'aura pas l'occasion d'enseigner la théorie de Planck de 1901 du rayonnement du corps noir introduisant des quanta d'énergie proportionnelle à la fréquence (Planck 1901), $\varepsilon = h\nu$ (où h est la constante de Planck) ; mais en 1911, suite au *Congrès Solvay* où il est invité, Poincaré se penche explicitement sur cette question. Il démontre rigoureusement que la loi de Planck (Planck 1900), bien satisfaite expérimentalement, est incompatible avec un spectre d'énergie continu des « éléments auxquels serait dû le rayonnement »[24]. Il délivre une communication à l'Académie des sciences un mois après le congrès le 4 décembre 1911 (Poincaré 1911b), puis

21. L'irréversibilité (non-invariance des lois dans le changement $t \longrightarrow -t$) concerne les phénomènes de transport (diffusion des particules, échanges thermiques, viscosité, etc.) et les réactions chimiques qui conduisent à l'équilibre des systèmes isolés. Elle se traduit pour l'entropie (mesure du désordre microscopique) de ces systèmes par une augmentation (jusqu'à atteindre l'équilibre) : second principe de la thermodynamique (« principe de Carnot » pour Poincaré).

22. Helmholtz avait tenté d'élargir le principe de moindre action de la mécanique à la thermodynamique en introduisant en 1884 la théorie des systèmes monocycliques, question également reprise par Boltzmann en 1886 (Darrigol 2018). Poincaré expose les travaux de Helmholtz dans son ouvrage (Poincaré 1892b).

23. Il s'agit du « théorème de récurrence » de Poincaré basé sur la conservation dans le temps d'un volume d'espace de phase, théorème qui a alimenté une polémique d'Ernst Zermelo (assistant de Max Planck) avec Ludwig Boltzmann, sur l'origine de l'irréversibilité (Darrigol 2018). Poincaré dira en 1893 qu'en pratique, pour un gaz, le temps de récurrence est infiniment long (ou la probabilité de revenir à l'état initial infiniment petite). L'estimation précise du temps de récurrence (exponentiel vis-à-vis du nombre de degrés de liberté) sera faite par Nikolaï Nekhoroshev en 1977 (Giorgilli 1995).

24. Le champ électromagnétique dans le vide peut être considéré comme une infinité d'oscillateurs de toutes fréquences ν. Dans la théorie de Boltzmann, l'énergie moyenne d'un oscillateur à la température absolue T étant kT, l'énergie volumique du rayonnement devrait être proportionnelle à T ... et devenir infinie. La même théorie assignant à chaque oscillateur des énergies quantifiées $\varepsilon_n = nh\nu$ $(n = 0, 1, 2, ...)$ explique la dépendance $[\exp(h\nu/kT) - 1]^{-1}$ avec la

soumet un long article le mois suivant au *Journal de physique théorique et appliquée* (Poincaré 1912). Enfin, dans sa dernière conférence intitulée *L'hypothèse des quanta*, donnée à l'Université de Londres le 11 mai 1912, deux mois avant sa mort, il tient même des propos prophétiques, parlant d'une mécanique qui ne serait plus régie par des équations différentielles, où « un système physique n'est susceptible que d'un nombre fini d'états » entre lesquels s'opèrent des « sauts » et où « c'est bien chaque quantum qui interfère avec lui-même » ; et alors « ce serait là la révolution la plus profonde que la philosophie naturelle ait subie depuis Newton ». Cette révolution porte aujourd'hui le nom de « révolution quantique » et continue à questionner scientifiques et philosophes.

I.2.2. *Poincaré « philosophe »*

Si Poincaré n'a pas une image de physicien correspondant à ses travaux, c'est qu'il a acquis parallèlement une grande notoriété avec ses ouvrages à grande diffusion que sont *La science et l'hypothèse* (Poincaré 1902), le plus connu, mais aussi *La valeur de la science* (Poincaré 1905b), *Science et méthode* (Poincaré 1908) et, à titre posthume, *Dernières Pensées* (Poincaré 1913)[25].

Dans ces ouvrages où il mêle avec un talent inégalé vulgarisation et réflexions historiques, philosophiques, pédagogiques[26], il ne fait pas état de ses propres découvertes et ne met jamais en avant ses propres idées. Mathématicien d'exception et observateur attentif d'une physique dont il perçoit la crise en 1904 (*Conférence de Saint-Louis*), il préfère revenir sur les rapports que physique et mathématiques entretiennent entre elles, avec l'expérience et avec leur histoire : la fameuse « expérience ancestrale », thème s'apparentant à une conception darwinienne de l'évolution des connaissances. Donnant l'image, dans *La science et l'hypothèse*, du « squelette de certaines éponges » dont « la matière organique a disparu », mais sur lequel « l'éponge vivante [...] a précisément imprimé cette forme », il observe de façon générale :

---

température que Planck avait proposée en 1900. Poincaré montre que, plus généralement, l'infinité de fréquences est compatible avec un rayonnement fini seulement si pour chacun il y a un saut d'énergie en $\varepsilon = 0$ (voir chapitre 6).

25. Ces ouvrages ont contribué à son élection à l'Académie française en 1908 au siège de Sully Prudhomme, dont Poincaré reproduit l'éloge dans *Savants et écrivains* (Poincaré 1910).

26. Poincaré a écrit de nombreux articles pédagogiques sur les mathématiques et la physique. Il a aussi activement participé à la réforme Georges Leygues de 1902 promouvant l'enseignement des sciences dans le secondaire (Hulin 2000). Son cousin germain, Lucien Poincaré, est alors Inspecteur général de l'Instruction publique en sciences physiques avant de devenir Recteur de l'académie de Paris ; il éditera en particulier avec Charles Edouard Guillaume les textes de conférences du *Congrès international de physique* de 1900 placé sous l'égide de la Société française de physique, dont il sera président en 1911 ; son frère, Raymond, avant d'être Président du Conseil, a été dans les années 1890 ministre de l'Instruction publique.

> « C'est ainsi que les anciennes notions intuitives de nos pères, même lorsque nous les avons abandonnées, impriment encore leur forme aux échafaudages logiques que nous avons mis à leur place. »

Plus particulièrement, concernant la géométrie, il précise :

> « On a dit souvent que si l'expérience individuelle n'a pu créer la géométrie, il n'en est pas de même de l'expérience ancestrale. Mais qu'entend-on par là ? [...] On veut dire que par sélection naturelle notre esprit s'est *adapté* aux conditions du monde extérieur, qu'il a adopté la géométrie *la plus avantageuse* à l'espèce ; ou en d'autres termes *la plus commode*. »

De par sa culture et son aptitude à maîtriser de nombreux domaines, Poincaré voit dans le développement des sciences plus un processus créatif d'adaptation continue[27] qu'une suite de ruptures épistémologiques, comme les physiciens le concoivent en général à la suite des travaux de Gaston Bachelard (Bachelard 1934, 1938) marqués par la physique quantique. C'est pourquoi il insiste souvent sur les différents aspects que recouvre la notion d'hypothèse et sur la nécessité d'en ériger certaines en conventions (axiomes mathématiques, principes en physique). Dans une situation de crise de la physique (électrodynamique et limites de la mécanique newtonienne, mouvement brownien et irréversibilité thermodynamique, radioactivité et conservation de l'énergie, etc.), c'est en effet sur ces principes qu'il faut veiller. Pour lui :

> « Ces principes ont une très haute valeur ; on les a obtenus en cherchant ce qu'il y avait de commun dans l'énoncé de nombreuses lois physiques ; ils représentent donc comme la quintessence d'innombrables observations. »

Cela n'exclut bien sûr pas qu'on puisse reformuler ces principes (par exemple le principe de l'action et de la réaction de Newton identifié au principe de conservation de la quantité de mouvement d'un système isolé), les élargir (par exemple ce principe étendu à l'énergie électromagnétique dans « La théorie de Lorentz et le principe de réaction » en 1900), voire les repenser comme on le verra du principe de relativité dans la conférence *L'espace et le temps*[28].

27. Par exemple, dans sa conférence de clôture le 11 avril 1912 à la Société de physique de Paris, publiée dans *Les dernières pensées* et intitulée « Les rapports de la matière et de l'éther » (où le mot éther ne figure quasiment pas, mais où il est beaucoup question de quanta et d'interaction matière-lumière), il conclut : « Je terminerai par la réflexion suivante. À mesure que la science progresse, il devient de plus en plus difficile de faire place à un fait nouveau. Les théories anciennes reposent sur un grand nombre de coïncidences numériques qui ne peuvent être attribuées au hasard ; nous ne pouvons donc disjoindre ce qu'elles ont réuni ; nous ne pouvons plus briser les cadres, nous devons chercher à les plier ; et ils ne s'y prêtent pas toujours. »

28. À la fin de la conférence *L'état actuel et l'avenir de la physique mathématique* prononcée au *Congrès international de Saint-Louis* le 24 septembre 1904, reprise dans *La valeur de la*

Si Poincaré accorde une grande importance aux conventions, il s'est toujours défendu d'un quelconque « conventionnalisme »[29], que des journalistes peu scrupuleux à son époque ont caricaturé en impossibilité de savoir si la Terre tourne ou pas[30]. C'est d'ailleurs suite à cette critique visant un passage de *La science et l'hypothèse* que Poincaré s'est engagé dans la publication de *La valeur de la science*. Plusieurs années après, invité par Felix Klein en 1909 à parler de la « mécanique nouvelle » à Göttingen, il rappellera à propos du principe de relativité :

> « [...] il n'y a pas d'espace absolu, tous les déplacements que nous pouvons observer sont des déplacements relatifs. Ces considérations bien familières aux philosophes, j'ai eu quelquefois l'occasion de les exprimer : j'en ai même recueilli une publicité dont je me serais volontiers passé, tous les journaux réactionnaires français m'ont fait démontrer que le soleil tournait autour de la terre ; dans le fameux procès entre l'Inquisition et Galilée, Galilée aurait eu tous les torts. »

Il réagirait probablement aussi au qualificatif de « conventionnaliste » que lui attribuent ceux qui pensent qu'à la lecture de ses ouvrages destinés à un large public (par la suite désigné par « grand public »), il ne semblerait n'y avoir en dernière instance pour Poincaré de géométrie qu'euclidienne (parce qu'il la juge « la plus commode » et qu'il a présenté des modèles euclidiens d'autres géométries), et qu'on pourrait conserver l'ancienne convention des physiciens pour la mécanique et la relativité. Comme on le verra dans *L'espace et le temps*, cette lecture ignore le public auquel Poincaré

Science, où il est question de remplacer la « mécanique vulgaire » (celle de Newton), qui deviendrait « une première approximation » de la « mécanique nouvelle », il écrit à propos des principes de l'ancienne : « Ils sont si utiles qu'il faudrait leur conserver une place. Vouloir les exclure tout-à-fait, ce serait se priver d'une arme précieuse. » Poincaré fait cependant une exception pour le « principe de Lavoisier » (qui en 1902 dans *La science et l'hypothèse* figurait parmi les grands principes avec ceux de Carnot, de l'action et de la réaction, de l'énergie, du « mouvement relatif » et de la moindre action) car contraire à une dépendance qui vient d'être observée de la masse avec la vitesse.

29. Il est délicat (et ce n'est pas le but ici) de qualifier la philosophie de Poincaré. Si l'étiquette « conventionnaliste » lui a été attribuée en particulier à la suite du mathématicien et philosophe Federigo Enriques (Enriques 1910) par les membres du Cercle de Vienne en lien avec leur doctrine (le positivisme logique), certains auteurs récents tiennent un propos très nuancé. Ainsi, la philosophe des sciences Anne-Françoise Schmid, après avoir remarqué que « la condition nécessaire pour poser une proposition comme convention est – paradoxalement – sa confirmation par l'expérience », confère à la convention un statut général (gnoséologique) ; elle précise que chez Poincaré : « La convention est le lien – philosophique – entre la science et la réalité, entre l'esprit et l'expérience [...]. La convention est en dernière analyse ce qui permet à l'esprit de penser l'expérience » (Schmid 2001).

30. Pour une approche de Poincaré professeur, savant, penseur, homme public, etc. à travers la presse de son temps, voir (Ginoux 2012).

s'adresse et le leitmotiv d'ordre pédagogique avec lequel il clôt ses conférences sur la « nouvelle mécanique ».

I.3. Henri Poincaré et la relativité

Comme pour beaucoup d'autres sujets de mathématiques ou de physique mathématique[31] auxquels il a contribué, Poincaré est intervenu sur la relativité de manière ponctuelle (principalement en 1900, puis en 1905), en relation avec des questionnements et travaux contemporains (ceux de Lorentz en 1895 et 1904), et en « inventeur » de nouvelles approches théoriques (notamment celle, algébrique, des groupes et des invariants en 1905). Pour apprécier sa contribution à ce domaine, comme à d'autres, il est non seulement naturel, mais aussi essentiel de se reporter aux articles originaux. En effet, que ce soit dans ses ouvrages, ses conférences, ses cours[32], voire même ses travaux scientifiques, Poincaré n'a jamais analysé ni mis en avant ses propres découvertes. Son collègue mathématicien Paul Appell, qui le connaissait depuis les classes préparatoires à Nancy, écrit dans sa biographie de Poincaré (Appell 1925) :

31. L'idée de relativité, associée aujourd'hui en physique à celle de symétrie des lois (symétrie d'espace, d'espace-temps ou symétrie interne), fait partie intégrante de la physique mathématique. Elle contribue, avec d'autres notions comme celle par exemple d'équation différentielle, ou de principe d'extremum, à fournir un cadre théorique général à la description des phénomènes physiques observés.

32. Par exemple, en juillet 1912, Poincaré donne son cours à l'École supérieure des postes et télégraphes (ESPT) sur « La dynamique de l'électron » (Poincaré 1913b), sujet initialement demandé par l'administration et auquel a été adjoint « Le principe de relativité ». Dans l'introduction de la version publiée du cours, l'ingénieur en chef de l'École Jean-Baptiste Pomey signale que, pour la rédaction des conférences, on n'a malheureusement disposé que de « notes trop hâtives » et d'une « liste des équations principales » (Poincaré étant décédé le 17 juillet). Bien que beaucoup de ces équations soient visiblement tirées du *Mémoire* de 1905 (et de l'article de 1900), Poincaré n'a jamais dû faire référence à ses travaux. En effet, concernant le principe de relativité et les transformations de Lorentz, Pomey ne le cite que pour des propos tenus dans *Électricité et Optique* (1901). Par contre, Pomey se réfère à la « monographie » récente de Laue (Laue 1911, chapitre 4) et affirme que « c'est dans le 17ᵉ volume des *Annales de Physique* de 1905 qu'on trouve le travail d'Einstein sur le principe de relativité envisagé de façon méthodique ». Il ne sait apparemment pas que la présentation pédagogique et élégante que Poincaré vient de faire de « La transformation de Lorentz » pour ses étudiants, en l'associant à l'invariance de l'électromagnétisme et à celle de la dynamique de Lorentz (comme le montrent les notes prises), est basée sur un travail pionnier du conférencier qu'il est chargé d'introduire. Notons aussi que Pomey, non-spécialiste du sujet, s'est tourné vers Paul Langevin pour avoir des informations précises (Fonds Paul Langevin, ESPCI). Mais, semble-t-il, Langevin, qui connaît pourtant parfaitement les travaux de Poincaré, n'y a pas renvoyé Pomey.

> « Il lui est même arrivé dans plusieurs notes d'indiquer comme théorème de tel ou tel des propriétés auxquelles tel ou tel n'avait certainement pas pensé. »

Comme on le verra, il donnera dans « Sur la dynamique de l'électron » en 1905 le nom de « groupe de Lorentz » à des transformations que Lorentz avait introduites dans un autre contexte en 1904 et qu'il n'avait associées ni à l'idée de relativité ni à l'idée de groupe.

I.3.1. *Les ouvrages « grand public » et la relativité*

Plutôt que de se reporter aux articles originaux et examiner son travail scientifique proprement dit, beaucoup de commentateurs de Poincaré sur la relativité ont préféré appuyer leur analyse de la contribution de Poincaré sur l'examen des propos qu'il a tenus dans ses ouvrages « grand public » de 1902, 1905 et 1908[33]. Il faut rappeler que les contemporains de Poincaré les considéraient avant tout comme des ouvrages de philosophie dans lesquels l'auteur fait part de ses réflexions sur les « hypothèses », les « méthodes », et les découvertes scientifiques (passées comme présentes). À leur propos, Gaston Darboux soulignait dans son *Éloge historique de Poincaré* : « Je n'oserais affirmer qu'ils ont été compris de tous ; pour saisir la pensée de leur auteur, une forte culture scientifique est nécessaire, qui manque à plus d'un. » En effet, si ces ouvrages ont été le fruit d'un effort pédagogique remarquable qui leur a valu une grande popularité, et s'ils se sont inscrits aussi dans l'histoire de la philosophie des sciences, on ne peut pleinement les comprendre (et porter sur eux une appréciation) qu'à travers la connaissance des travaux de leur auteur (voir (Bracco et Provost 2013) pour une discussion)[34]. Inversement, on ne peut pas considérer les réflexions et prises de position,

33. Une exception notable est l'historien des sciences Arthur Miller qui a contribué dans sa thèse (Miller 1973) à faire connaître le *Mémoire* de Poincaré de 1905 « Sur la dynamique de l'électron ». Mais il ne l'a pas replacé dans sa perspective mathématique et générale. Il l'a plutôt rendu tributaire d'une vision électromagnétique de la matière, qui, il est vrai, était celle des physiciens contemporains de Poincaré.

34. Par exemple, pour un mathématicien, l'intérêt de Poincaré pour les géométries non euclidiennes dans *La science et l'hypothèse* est inséparable de ses travaux en 1881 sur les fonctions fuchsiennes, ou de ses contributions à la popularisation des représentations planes de la géométrie de Lobatchevski, ou encore des liens qu'il a établis en 1887 entre géométries à deux dimensions et quadriques de l'espace euclidien, par exemple $Q = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ pour celle de Lobatchevski et $Q = 1$ pour ce qu'il appelle la « quatrième géométrie », dans laquelle, affirme-t-il sans explication à son lecteur, « *une droite réelle peut être perpendiculaire à elle-même* ». (L'hyperboloïde $Q = 1$ est une surface réglée dont les droites, par exemple $x = 1, y = \lambda, z = \pm\lambda$, sont des géodésiques nulles pour la métrique $dx^2 + dy^2 - dz^2$ (Nabonnand 2012)).

pédagogiques et philosophiques, de Poincaré dans ces ouvrages comme représentatives des idées et des découvertes originales qui ont marqué ses travaux[35].

À ces remarques, il faut ajouter que, concernant la physique, Poincaré a beaucoup associé ses réflexions au développement historique foisonnant de cette discipline, notamment à celui de la physique expérimentale nouvelle, qui s'inscrivait sous ses yeux à la fin du XIX[e] siècle et lui faisait pressentir une « crise » de la physique mathématique censée la décrire[36]. Plutôt que de fournir des réponses personnelles aux questionnements multiples issus de ce développement, il a avant tout cherché à leur donner vie et sens pour un large public.

Dans l'histoire de la physique mathématique, qu'il examine en 1904 à la *Conférence de Saint-Louis* (voir note de bas de page 28), Poincaré distingue une « première phase », mécanique, qui s'est appuyée sur les « forces centrales » et la « loi de Newton » (« équation différentielle »). Appliquée avec succès à « l'univers astronomique », elle s'est révélée insuffisante au XIX[e] siècle pour décrire le monde (microscopique) des « astres infiniment petits [...] les atomes ». Cette première crise, dit-il, a conduit à une « deuxième phase » qui consiste à « prendre pour guides certains principes généraux », à commencer par « le principe de conservation de l'énergie [...] le plus important », mais aussi les principes « de Carnot », « de la relativité », « de l'égalité de l'action et la réaction » (« intimement lié au précédent »), « de la conservation de la masse » (Lavoisier) et enfin « de moindre action » (qui « survivra longtemps aux autres [...] [car] plus vague et plus général encore » ajoute-t-il plus loin). Poincaré présente ensuite avec beaucoup de détails, et avec quelque plaisir, ce qui semble être une « deuxième crise » de la physique mathématique, à savoir les difficultés rencontrées à accorder ces principes (tels qu'on les comprend) avec les découvertes récentes dans le domaine des « infiniment petits » (mouvement brownien, physique des électrons, spectres atomiques, radioactivité, etc.). Son but principal n'étant pas de donner des réponses scientifiques, mais plutôt d'apporter une réflexion philosophique, il se prononce pour qu'on n'abandonne ces principes « qu'après avoir fait un effort loyal pour les sauver » et conclut : « Je vous ai montré que dans la deuxième Physique mathématique, celle des principes, on retrouve les traces de la première, celles des forces

35. Par exemple, dans *La science et l'hypothèse*, Poincaré privilégie la géométrie euclidienne par rapport à celle de Lobatchevski car jugée « la plus commode ». Il ne s'agit évidemment pas là d'un déni de l'intérêt de la seconde pour les mathématiques (voir note de bas de page précédente) ou pour l'astronomie (Poincaré connaît l'effet de parallaxe géométrique prédit par Lobatchevski lui-même pour les étoiles les plus éloignées) ; il s'agit de sa part d'une réflexion générale sur ce qui amène une collectivité scientifique (et au-delà) à prendre pour « convention » (ou adopter) une géométrie.

36. « La crise actuelle de la physique mathématique » est le titre du chapitre VIII de *La valeur de la Science* (1905), qui suit le chapitre VII « L'histoire de la physique mathématique ».

centrales ; il en sera de même si nous devons en connaître une troisième. » Concernant cette troisième physique mathématique en lien avec le monde microscopique, il envisage que la théorie cinétique serve d'exemple :

> « Alors les faits [observés] [...] ne seraient plus que les résultantes d'un très grand nombre de faits élémentaires que les lois seules du hasard feraient courir à un même but. La loi physique [...] ne serait plus seulement une équation différentielle, elle prendrait le caractère d'une loi statistique. »

À l'exception de son introduction dans *La valeur de la science* (1905) du « principe de relativité » comme grand principe de la physique[37], et de son interprétation du temps local de Lorentz de 1895 en termes de synchronisation des horloges d'observateurs en mouvement dans l'éther, la présentation grand public par Poincaré des questions touchant à la relativité a surtout été consacrée aux efforts déployés par les physiciens pour interpréter les multiples « tentatives pour mesurer la vitesse de la terre par rapport à l'éther », ainsi qu'à l'illustration et à la discussion, toujours en relation avec ce principe, de leurs hypothèses : isotropie et constance de la vitesse de la lumière ; temps local et contraction longitudinale attribués aux corps en mouvement (Lorentz 1892 ; FitzGerald 1892) ; masse inertielle dépendante de la même façon de la vitesse que son origine soit ou non électromagnétique, etc. En particulier, après 1905, comme il ne fait pas référence explicitement aux transformations qui accompagnent ce principe (transformations qu'il est le premier à introduire sous leur forme moderne en juin 1905), il ne présente pas le « temps local » de Lorentz de 1904 et la contraction comme en étant des conséquences. Il préfère relier entre elles à des fins pédagogiques ces deux hypothèses historiques à la lumière du principe.

Un exemple de connexion entre ces deux hypothèses, qu'il a présenté à plusieurs reprises[38] et a été mal compris, concerne l'émission d'ondes sphériques par une source mobile, ondes qui, en tant que surfaces géométriques rapportées à un système d'axes en mouvement vu comme contracté et ayant la source pour origine, « paraîtront des ellipsoïdes allongés » dans le sens du mouvement ; un paradoxe apparent (par rapport à l'invariance de c) que Poincaré s'empresse ensuite de lever en quelques mots[39]. Dans

37. Poincaré introduit l'idée de relativité (sous sa forme galiléenne) dès 1895, puis le « principe de mouvement relatif » en 1900 (en tenant compte du « temps local » de Lorentz), avant de le présenter sous sa forme moderne dans son *Mémoire* de 1905 (en l'érigeant en postulat).

38. Par exemple, dans son cours de 1906 *Les limites de la théorie de Newton*, dans *Science et méthode* en 1908, à Lille en 1909 pour un congrès de l'Association française pour l'avancement des sciences, etc.

39. L'explication (pas toujours précisée clairement par Poincaré) est que les points de l'onde sphérique (lieu d'égale phase) correspondent à un même temps t dans le référentiel considéré, alors que ceux de l'ellipsoïde (objet matériel ou figure géométrique) correspondent à des temps locaux différents dans le référentiel en mouvement, donc à des distances différentes à la source.

le vocabulaire rendant compte du principe de relativité, c'est-à-dire de l'impossibilité de mettre en évidence un mouvement absolu, Poincaré introduit souvent le terme « compensation », très probablement en relation avec la problématique de Fresnel en 1818 concernant les résultats négatifs de l'expérience d'Arago (voir note de bas de page 8). Il sait que, quand on change de référentiel, les grandeurs impliquées dans une relation peuvent changer, mais pas la relation elle-même qui manifeste le « rapport vrai ». La « compensation » est ce qu'on appelle aujourd'hui la « covariance » !

Ce n'est pas dans *Science et méthode* (1908) que l'on trouvera un écho de sa contribution à la mécanique relativiste (l'invariance de l'équation de la dynamique de Lorentz, comme on le verra), même si trois sections du livre III comportent le mot « mécanique » dans leur titre : *La mécanique nouvelle* (III.1), *La mécanique et l'optique* (III.2) et *La mécanique nouvelle et l'astronomie* (III.3). C'est pourtant elle qui lui permet d'affirmer, à la fin de la section III.2, que la dépendance en vitesse de la masse d'un corps dans la mécanique nouvelle est, comme sa contraction, liée au principe de relativité. Reprenant des conditions déjà formulées par Lorentz en 1904 dans sa théorie des « états correspondants », il déclare :

> « La compensation sera parfaite et conforme aux exigences du Principe de relativité, mais cela à deux conditions : 1^o Que les électrons n'aient pas de masse réelle [...] ou tout au moins que leur masse réelle [non électromagnétique], si elle existe [...] varie avec la vitesse suivant les mêmes lois que leur masse fictive [masse électromagnétique] ; 2^o Que toutes les forces varient avec la vitesse suivant les mêmes lois que les forces d'origine électromagnétique. »

C'est aussi son introduction en 1905 du lagrangien relativiste dont il ne parle pas et un calcul de 1906 auquel il ne fait pas référence qui lui permettent de conclure, vers la fin de la section III.3 :

> « En résumé, *le seul effet sensible sur les observations astronomiques serait un mouvement du périhélie de Mercure, de même sens que celui qui a été observé sans être expliqué, mais notablement plus faible* [un sixième]. Cela ne peut pas être regardé comme un argument en faveur

---

Si le facteur de contraction est celui de Lorentz associé à la vitesse de la source, celle-ci est un foyer de l'ellipsoïde, et ses distances aux points de l'ellipsoïde sont le produit de la vitesse c et des temps locaux. On peut dire que l'invariance de c dans cette présentation inhabituelle est le résultat d'une « compensation » entre effets de « contraction » et de « temps local ». Des détails mathématiques sont donnés dans son cours à la Sorbonne de l'hiver 1906-1907 (Poincaré 1953) et dans son cours à l'ESPT en 1912.

> de la nouvelle Dynamique [...] mais cela peut encore moins être regardé comme un argument contre elle. »

De même, alors qu'après 1905 il connaît parfaitement les idées mathématiques associées au principe de relativité, pour en avoir subitement pris conscience en mai 1905 au cours d'un échange épistolaire avec Lorentz[40], il n'en fera pas état dans *Science et Méthode* (1908). Pourtant, au livre I, chapitre 2, intitulé « L'avenir des mathématiques », il écrit :

> « Parmi les mots qui ont exercé la plus heureuse influence, je signalerai ceux de groupe et d'invariant [...]. L'idée de groupe se rattache d'ailleurs à celle de transformation. »

Comme ces « mots » n'apparaissent pas dans les livres II et III où il est amplement question de relativité et de physique, Poincaré aurait-il oublié l'enseignement de Galilée : « l'Univers [...] écrit dans la langue mathématique » et la nécessité d'en connaître « les caractères » ? Certainement pas ; mais il doit savoir alors, notamment après ses échanges avec Lorentz en 1905 et 1906, que malheureusement les physiciens ne sont pas encore prêts à comprendre les nouveaux « caractères » (qu'il vient d'introduire) de cette langue[41].

Il est vrai, comme on l'a rappelé plus haut, que les mathématiciens eux-mêmes ne venaient de saisir l'essence algébrique des géométries (euclidienne, projective, non euclidiennes, etc.), que depuis peu de temps, avec Felix Klein et le *programme d'Erlangen* (1872)[42]. Il est vrai aussi que Poincaré lui-même n'avait pas vu en 1900 que les transformations qu'avait introduites Lorentz en 1895 pouvaient être les générateurs d'un groupe de Lie associé à une géométrie de l'espace-temps (ce qu'il ne verra qu'en 1905, voir chapitre 5).

40. Voir chapitre 3.

41. Pour Galilée ces « caractères » étaient « des triangles, des cercles et autres figures géométriques ». Pour les physiciens de la relativité, ce sera, après 1908, la notation quadridimensionnelle de Hermann Minkowski (Minkowski 1908) qui leur servira à décrire l'électromagnétisme et la mécanique des milieux continus (Pauli 1921). Les physiciens n'adopteront pleinement ceux, algébriques, introduits par Poincaré (et Hilbert) que trente ans après, en relation avec la physique quantique relativiste.

42. Klein définit dans son programme la recherche géométrique comme suit : « Étant donné une multiplicité [un espace, une variété, ...] et un groupe de transformations de cette multiplicité, en étudier les êtres au point de vue des propriétés qui ne sont pas altérées par les transformations du groupe. » En physique relativiste, les « êtres » sont les « grandeurs » et les « propriétés » sont les « lois » qui les impliquent. Le programme de Klein sera développé par le norvégien Sophus Lie avec qui Poincaré est en relation dès 1882 (et dont il parle dans *La science et l'hypothèse*) et par Camille Jordan qu'il connaît à Paris.

I.3.2. *La contribution scientifique de Poincaré à la relativité*

La contribution scientifique de Poincaré à la relativité tient, comme on l'a dit, essentiellement en deux articles. Ils ont été écrits chacun dans un laps de temps très court (un à deux mois) et apportent en particulier un éclairage radicalement nouveau sur les travaux de Lorentz.

I.3.2.1. *1900*

Le premier article, intitulé « La théorie de Lorentz et le principe de réaction », est sa contribution au Jubilé (*Festschrift*) pour Lorentz (auquel le volume 5 des *Archives néerlandaises des sciences exactes et naturelles* est dédié), le 11 décembre 1900, alors qu'il était invité, parmi une soixantaine de physiciens de renom, à commémorer à Leyde en Hollande le vingt-cinquième anniversaire de la thèse de doctorat du grand savant. Cet article fait suite à une longue période au cours de laquelle Poincaré a enseigné l'électromagnétisme de Maxwell et de ses successeurs (Helmholtz, Hertz, Larmor, Lorentz, etc.) avec un souci de comparaison des théories entre elles et d'examen de leur obéissance à quelques grands principes issus de l'histoire de la mécanique, parmi lesquels le principe de l'action et de la réaction (ou loi de conservation de la quantité de mouvement), le principe de conservation de l'énergie et le principe de moindre action[43]. À partir de 1895, l'approche microscopique de Lorentz de charges libres de se déplacer dans un éther immobile et soumises à la *force de Lorentz* de la part des champs électrique et magnétique lui paraît la plus prometteuse. Elle présente à ses yeux le grand avantage de rendre compte de la formule que Fresnel a déduite en 1818 des résultats négatifs de l'expérience du prisme d'Arago et qui lui a fait conclure que « le mouvement de notre globe ne doit avoir aucune influence sensible sur la réfraction apparente »[44] : mais elle a le défaut de ne pas obéir au principe d'action et réaction connu en mécanique, car la quantité de mouvement totale d'un système isolé de charges électriques en interaction n'est pas constante. Pour Lorentz, l'éther porteur des champs électrique et magnétique (qui définissent son état) agit sur les charges sans réaction de leur part[45].

---

43. Voir chapitre 1.

44. La « réfraction apparente » est celle observée sur Terre. Fresnel énonce ainsi que les lois de l'optique géométrique sont les mêmes sur Terre et dans l'éther, ce que Lorentz généralisera en 1895 aux lois de l'électromagnétisme, et que Poincaré comprendra comme une manifestation du « principe de mouvement relatif ».

45. Le statut de l'éther est une question partiellement scientifique et partiellement philosophique (voire de pure métaphysique comme Poincaré le suggère dans *La science et l'hypothèse*). Historiquement, l'éther a souvent désigné un milieu subtil et mystérieux susceptible d'être responsable de transports et de sensations (la chaleur, la lumière, etc.), voire même d'être responsable de la matière elle-même (matière vue par exemple comme une concentration d'éther), ou bien encore d'être lié à la gravitation. Pour Fresnel, c'est le milieu qui pourrait rendre compte de

Dans son article, Poincaré commence par corriger ce défaut en montrant que les équations de Lorentz portent en elles l'existence d'une « quantité de mouvement de l'énergie électromagnétique » dont la densité est égale au courant d'énergie si on prend comme unité de vitesse celle de la lumière[46]. Avec l'introduction de cette quantité de mouvement, qui sera saluée comme étant d'une grande importance pour la physique théorique[47], il va non seulement satisfaire le principe d'action et réaction comme le remarque Abraham dès 1902, mais aussi contribuer à faire du champ un véritable système dynamique[48]. Cela permettra à Max Abraham (Abraham 1902, 1903), Paul Langevin (Langevin 1904) et Lorentz (Lorentz 1904), entre 1902 et 1904, d'élaborer, comme le souhaitait Wilhelm Wien (Wien 1900a, 1900b), une mécanique de l'électron fondée sur l'hypothèse de l'origine électromagnétique de son inertie (origine qu'ils attribueront à l'éther).

Le deuxième point important de l'article de 1900 est l'interprétation de la théorie des « états correspondants » et du « temps local » de Lorentz (1895) comme étant la manifestation d'une relativité (nouvelle) rendant compte à l'ordre V/c (où V est la vitesse relative des référentiels considérés et c la vitesse de la lumière dans le vide) de l'invariance des lois de l'électromagnétisme. Les « états correspondants » sont, pour

la propagation des vibrations lumineuses (bien qu'elles soient transverses). Pour Lorentz, c'est d'abord le référentiel privilégié et immobile où il faut écrire les équations de Maxwell.

46. Les physiciens connaissaient bien auparavant pour le champ électromagnétique l'existence d'une densité et d'un courant d'énergie, ainsi que celle d'effets de contraintes dans le milieu (Maxwell). L'égalité entre densité de quantité de mouvement et courant d'énergie sera considérée après les travaux de Planck, Minkowski, Abraham, Max von Laue, entre 1908 et 1912, comme l'expression la plus générale de « l'inertie de l'énergie ».

47. Dans la préface du volume 38 des *Acta mathematica* en hommage à Poincaré, Wien (Wien 1915) rappelle : « Ainsi, non seulement [Poincaré] avait un grand intérêt pour la physique et une profonde compréhension de celle-ci, mais il a également joué un rôle très important dans le développement ultérieur des théories physiques. » Parmi les contributions de Poincaré, Wien signale : « Un article qu'il publie en 1900 dans le Jubilé de Lorentz est d'une grande importance pour la physique théorique. Il y a introduit la quantité de mouvement électromagnétique, qui a permis d'éliminer la contradiction vis-à-vis du principe de l'action et de la réaction, une théorie devenue très importante pour le développement ultérieur de l'électrodynamique » (traduction des auteurs).

48. Après avoir annoncé dans son introduction que dans la théorie de Lorentz le théorème du centre de masse se présente sous la même forme que le principe de l'énergie (égalité de la puissance des forces extérieures et de la dérivée temporelle de l'énergie totale de la matière et du champ électromagnétique), Abraham poursuit : « La relation de la théorie de Lorentz au troisième axiome de Newton a été discutée de manière particulièrement détaillée par Monsieur Henri Poincaré ; il a souligné que la loi de conservation de la quantité de mouvement conserve sa validité si une certaine quantité de mouvement est attribuée au champ électromagnétique » (Abraham 1902, p. 25, traduction des auteurs). Abraham donne ensuite l'expression de cette quantité de mouvement.

Lorentz, ceux de deux systèmes physiques, respectivement l'un au repos et l'autre en mouvement à la vitesse V dans l'éther. Lorentz introduit, pour comparer (et identifier) le second au premier, le changement de variable $x' = x - Vt$ (x' étant donc la coordonnée d'espace dans un système d'axes qui lui est attaché), accompagné du changement :

$$t' = t - Vx/c^2$$

(t' variable « fictive » qu'il appelle *Ortszeit* ou « temps local » parce qu'elle dépend du lieu considéré). Poincaré explique que t et t' sont les temps indiqués par les montres d'observateurs respectivement au repos et en mouvement relatif à la vitesse V, synchronisées sur la base de la constance de la vitesse c de la lumière. À la fin de son article, il applique les relations entre (x, t) et (x', t') aux évènements (lieu et instant) associés au début et à la fin de l'émission d'un train d'onde (émis par un oscillateur de Hertz au foyer d'un miroir parabolique), considérant donc t et t' comme de véritables instants associés à ces évènements par les observateurs.

À la fin de son article, Poincaré utilise les transformations de Lorentz de 1895 pour en déduire la transformation de l'énergie du train d'onde lumineux et introduire sa quantité de mouvement. Il obtient (en notations modernes) :

$$\varepsilon'_\gamma = \varepsilon_\gamma \left(1 - \frac{V}{c}\right) = \varepsilon_\gamma - Vp_\gamma$$

montrant que dans la théorie de Lorentz l'énergie lumineuse n'est pas invariante. Puis à partir des lois de conservation, il en tire quelques conclusions concernant le recul de l'émetteur de ce train d'onde. Son but n'est pas alors d'initier une nouvelle mécanique, travail des physiciens, mais de montrer que l'existence de cette quantité de mouvement du rayonnement est, comme pour la matière, impliquée par les principes de l'énergie et de relativité, et avec désormais la prise en compte du temps local. Dans sa réponse à Poincaré le 20 janvier 1901 (Miller 1997 ; Walter *et al*. 2007), Lorentz campera sur ses positions, considérant que le principe de l'action et de la réaction (qui, en mécanique newtonienne, concerne la matière uniquement) n'a pas lieu d'être étendu. Il préfère considérer que la quantité de mouvement du champ n'est que « un état de l'éther » sauf si « nous parvenons à considérer la matière pondérable comme une modification de l'éther lui-même ». Par contre, plusieurs résultats de cet article de Poincaré cité par Albert Einstein (Einstein 1906) ont pu avoir une influence sur les réflexions de ce dernier (en compagnie de son ami Michele Besso) sur les quanta début 1901 à Milan et sur la relativité au printemps 1905 à Berne (Bracco 2017 ; Bracco et Provost 2018).

I.3.2.2. *1905*

Après 1900, Lorentz cherche à étendre sa « théorie des états correspondants » à tout ordre en V/c, comme l'avait suggéré Poincaré dans le chapitre VI d'*Électricité* *et Optique* (voir chapitre 3). En 1904, en introduisant les transformations connues aujourd'hui sous son nom, il pense y avoir réussi, non seulement pour les états électromagnétiques d'un diélectrique (états caractérisés par les champs électrique et magnétique et les densités de charge et de courant électrique), mais aussi pour les états mécaniques, impliquant la quantité de mouvement et la force subie, grandeurs liées entre elles par une nouvelle équation de la dynamique :

$$\vec{F} = d\vec{p}/dt \quad \text{avec} \quad \vec{p} = m\vec{v},\ m = m_0/\sqrt{1 - v^2/c^2}$$

(comme en mécanique newtonienne, mais où la masse dépend de la vitesse).

L'article de 1905 de Poincaré « Sur la dynamique de l'électron », soumis le 23 juillet 1905 aux *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* (Poincaré 1906), et plus connu aujourd'hui sous le nom de *Mémoire de Palerme*, va être non seulement une mise en perspective mathématique et conceptuelle du travail de Lorentz de 1904 (comme l'avait été l'article de 1900 pour celui de Lorentz de 1895), mais aussi, à la lumière de la relativité connue aujourd'hui, une authentique présentation relativiste (avec au centre les idées de groupe et d'invariance) de la physique qu'il connaît, à savoir :

– l'électromagnétisme de Maxwell actualisé par Lorentz ;

– la mécanique de Newton généralisée par Lagrange et Hamilton (avec notamment le principe de moindre action) ;

– la loi de force de Newton de la gravitation dont la vérification, considérait-il selon Darboux, est le « véritable but de la mécanique céleste » ;

– enfin, l'hypothèse de la masse électromagnétique de l'électron[49].

L'article étant très complet (47 pages dans son édition originale), d'un niveau technique élevé, et surtout centré sur les fondements mathématiques de la relativité, Poincaré l'a adressé naturellement à une revue de mathématiques où il avait déjà publié, mais qui était aussi bien connue dans les centres européens de physique mathématique[50]. Une version résumée respectant les raisonnements de Poincaré et le déroulement de ses calculs est présentée (avec des notes) à la fin de la partie 2.

---

49. Rappelons que l'électromagnétisme est alors, avec la gravitation, la seule interaction fondamentale connue. Cette tentative a pour analogue aujourd'hui l'explication de la masse des hadrons à partir de la chromodynamique quantique et de l'hypothèse de masse nulle des quarks (*mass without mass program*).

50. Par exemple, à Göttingen, où se trouvent en 1905 les mathématiciens Klein, Hilbert, Minkowski, l'astronome Karl Schwarzschild, les physiciens Woldemar Voigt, Max Abraham, Max Born. Les *Rendiconti* étaient l'un des rares endroits où Poincaré pouvait soumettre un article de

Parmi les résultats originaux du *Mémoire de Palerme* concernant la physique relativiste, on peut citer :

– la première écriture moderne des transformations de Lorentz et l'introduction du « groupe de Lorentz » comme engendré par les dilatations et les transformations qui conservent la forme quadratique $x^2+y^2+z^2-t^2$, Poincaré donnant même l'expression de son algèbre de Lie et posant $c = 1$ pour la vitesse de la lumière (comme le font les physiciens relativistes aujourd'hui) ;

– l'invariance exacte des lois de l'électromagnétisme par ce groupe, avec la première transformation correcte des forces ;

– l'invariance de l'équation de la dynamique de Lorentz par ce groupe à condition d'exclure les dilatations et la première introduction du lagrangien relativiste (sur la base de l'invariance de l'action) ;

– la justification que la gravitation doit se propager à la vitesse de la lumière d'un corps à l'autre, de nombreux exemples de forces gravitationnelles relativistes construites à partir des invariants du problème à deux corps, et même une première écriture quadridimensionnelle de l'équation de la dynamique. Dans son cours à la Sorbonne (hiver 1906-1907) intitulé *Les limites de la loi de Newton*, Poincaré fait le calcul relativiste du déplacement du périhélie de Mercure et rend compte d'un sixième de l'observation la plus récente ;

– le fait qu'un modèle purement électromagnétique d'un électron étendu (non ponctuel) ne peut satisfaire les équations de Hamilton de la mécanique en raison de l'absence d'équilibre (ou, s'il les satisfait par le recours d'une liaison, viole le principe de relativité). Poincaré propose d'ajouter à l'action électromagnétique un terme proportionnel au volume d'espace-temps balayé par l'électron (qu'il associe à une pression négative intérieure appelée depuis « pression de Poincaré »).

Ces résultats sont impressionnants, au regard des connaissances actuelles de la relativité, même si on en ferait aujourd'hui une présentation pédagogique différente en liaison avec les progrès de la physique expérimentale du siècle écoulé.

On peut aussi regretter rétrospectivement que Poincaré évite manifestement de contester l'opinion des physiciens (dont il examine les modèles) sur la nature purement électromagnétique de la masse de l'électron et qu'il n'inclut pas dans la masse l'énergie potentielle associée à la pression.

---

physique mathématique. Abraham publiera dans les *Rendiconti* son article « Zur Elektrodynamik bewegter Körper » (vol. 29) en 1909 et « SulL'ellectrodinamica di Minkowski » (vol. 30) en 1910.

Poincaré est probablement conscient que certains résultats concernant la physique et les physiciens, à commencer par Lorentz, dont il récrivait différemment les transformations et corrigeait les erreurs, et Abraham et Langevin, dont les mécaniques étaient remises en question car elles ne satisfaisaient pas au principe de relativité, étaient trop importants pour qu'on attende leur parution (qui aura lieu en janvier 1906). Il propose ainsi parallèlement une communication aux *Comptes rendus hebdomadaires de l'Académie des sciences* (CRAS) lors de la séance du 5 juin 1905. Les publications des CRAS sont rapides (Crosland 1978) et l'article est disponible une à deux semaines plus tard dans toutes les librairies scientifiques ayant souscrit un abonnement et dans un grand nombre de bibliothèques universitaires à travers l'Europe[51].

Cette communication, très courte, dans le format usuel de 4 pages, est présentée dans la partie 2 et commentée au regard des résultats du *Mémoire de Palerme*, qu'elle annonce (et qui est résumé à sa suite).

I.3.2.3. *Après 1905*

Lorentz, qui appréciait par ailleurs les autres contributions de Poincaré à la physique mathématique, n'a pas compris avant semble-t-il 1915 la relativité de Poincaré. Il ne voyait probablement pas en quoi une affaire de groupe et d'invariants pouvait être au coeur de ses travaux qui étaient eux issus d'interrogations liées à la physique. Il comprendra davantage l'article de juin 1905 d'Einstein qui part de l'invariance de la vitesse de la lumière comme postulat (Poincaré fait $c = 1$) pour trouver les transformations d'espace-temps (Poincaré les pose) à partir d'une problématique du temps (Poincaré ne mentionne pas son temps local de 1904, qui deviendra temps propre pour Einstein). De même, il comprendra mieux le court article de Planck en mars 1906, qui, reprenant le travail incomplet d'Einstein sur la dynamique plus simple d'une charge ponctuelle dans un champ électromagnétique, retrouve son équation de la dynamique de 1904, puis le lagrangien relativiste (sans supposer comme Poincaré l'action invariante !). Ces quelques exemples expliquent l'incompréhension pendant longtemps, et aujourd'hui souvent encore, de nombreux physiciens vis-à-vis de l'intérêt pour la relativité du *Mémoire* de Poincaré, et par voie de conséquence le jugement d'historiens de la physique sur l'attitude de Poincaré la concernant.

Il faut dire aussi qu'à part son calcul de 1906 sur le périhélie de Mercure, Poincaré n'est pas revenu scientifiquement sur la relativité ; il n'avait d'ailleurs pas à le faire car les travaux des physiciens sur ce sujet allaient se développer sans interrogations mathématiques majeures jusqu'à ce qu'Einstein suspecte, fin 1912, un lien possible entre gravitation et géométrie riemannienne et fasse appel à son ami mathématicien Marcel Grossmann (Sauer 2015).

51. Voir par exemple la troisième page du tome 1 (vol. 140) de 1905 pour la liste détaillée des librairies recevant les CRAS : https ://gallica.bnf.fr/ark :/12148/bpt6k30949/f3.item.

Poincaré meurt subitement le 17 juillet 1912. Il n'assistera pas aux efforts d'Einstein entre 1912 et 1915 (CPAE, (Janssen 2007a, 2007b ; Provost et Bracco 2014 ; Darrigol 2022) pour traduire mathématiquement le principe d'équivalence (entre systèmes accélérés et systèmes soumis à un champ de pesanteur) dans une théorie relativiste de la gravitation (Damour 2005b) ; des efforts remarquables, compte tenu de la difficulté du sujet, et comparables par leur ténacité à ceux que Lorentz avait déployés de 1895 à 1904 en relation avec son idée « d'états correspondants ». Il n'aura donc pas l'occasion de porter un jugement sur la conclusion d'Einstein fin 1915 en faveur d'une « relativité générale », relativité qui en apparence sous-estime l'importance du groupe de symétrie dans la géométrie riemanienne au profit de l'invariance des lois vis-à-vis des changements arbitraires de coordonnées[52]. Cette importance sera soulignée par les mathématiciens Hermann Weyl (Weyl 1918), Élie Cartan (Cartan 1925), etc., avec l'interprétation de la notion de connexion (de Ricci et Levi-Civita) comme transformation infinitésimale d'un groupe permettant de comparer une même grandeur en des points infiniment voisins. Poincaré n'aura pas non plus l'occasion de connaître les travaux d'Emmy Noether de 1918 sur l'association des lois de conservation de la physique à l'invariance d'une action par un groupe de symétrie de dimension finie, par exemple la conservation de la quantité de mouvement et de l'énergie d'un système isolé associés à une invariance vis-à-vis des translations d'espace et de temps (Kosmann 2004).

La « dernière pensée » de Poincaré sur la relativité est celle exprimée à l'Université de Londres le 4 mai 1912 dans sa conférence *L'espace et le temps* (voir partie 3). Poincaré reste fidèle au « groupe de Lorentz » qu'il compare (pour la première fois en public) aux groupes de la géométrie. Il parle même de « relativité de Lorentz » qu'il qualifie de « physique » en opposition à une « relativité psychologique », qui serait celle d'un espace amorphe[53]. Il considère aussi que cette relativité physique ne concerne pas l'univers entier, mais plutôt la comparaison de « petits mondes », voisins et « indépendants ». Autrement dit, il envisage – semble-t-il – qu'elle puisse être locale, plutôt que globale, ce qui est proche de la conception moderne de l'idée de relativité.

52. De manière analogue, Hilbert privilégie fin 1915 l'invariance de la « fonction d'univers » (l'action relative à la métrique d'espace-temps et à l'électromagnétisme) par rapport aux transformations arbitraires des « paramètres d'univers » (les coordonnées d'espace-temps), avant de prendre connaissance des études de Weyl qu'il jugera dans une nouvelle édition de ses travaux en 1923 « brillantes et profondes » (Hilbert 1915, 1924).

53. Un tel espace est ce qu'on appelle en mathématiques un espace topologique. Dans le domaine de la topologie (*Analysis situs*), Poincaré est aussi à l'origine de l'introduction des notions de groupe (groupe fondamental aussi appelé « groupe de Poincaré », groupe d'homologie, etc.) et d'invariants utiles à la classification des espaces topologiques.

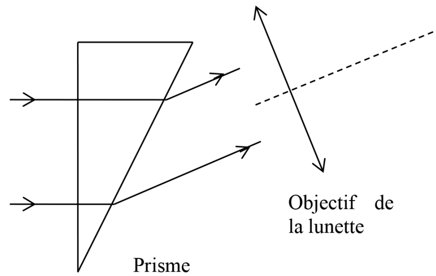


Schéma simplifié de l'expérience d'Arago sur l'observation d'étoiles à travers un prisme et une lunette à différents moments de l'année. Les changements de direction de la vitesse de la Terre n'ont aucune influence sur les observations (voir chapitre 1 et explication annexe 4).

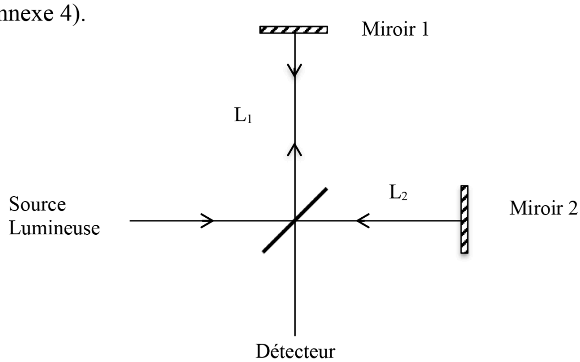
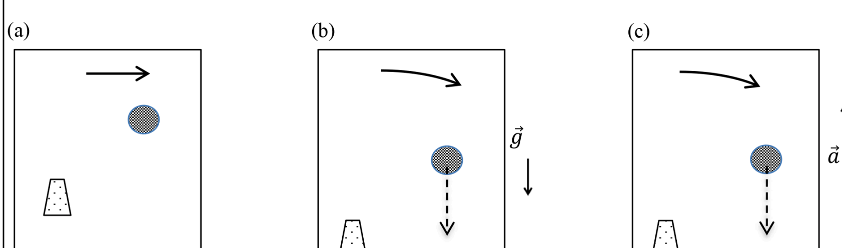
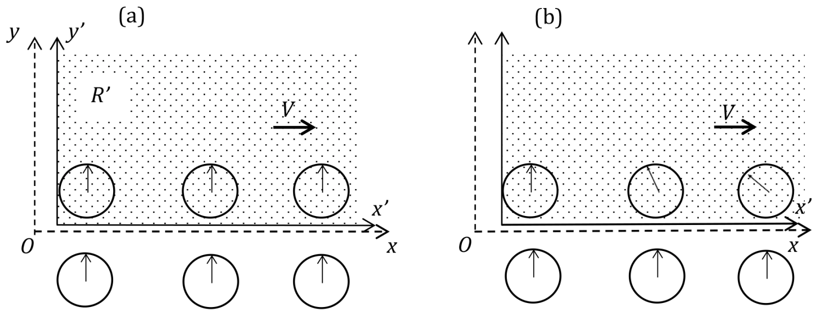


Schéma simplifié de l'expérience de Michelson. Le faisceau lumineux issu de la source est séparé par une lame semi-réfléchissante. La disposition des bras L_1 et L_2 de l'interféromètre par rapport à la direction de la vitesse de la Terre n'a pas d'influence sur la disposition des franges d'interférences observées.

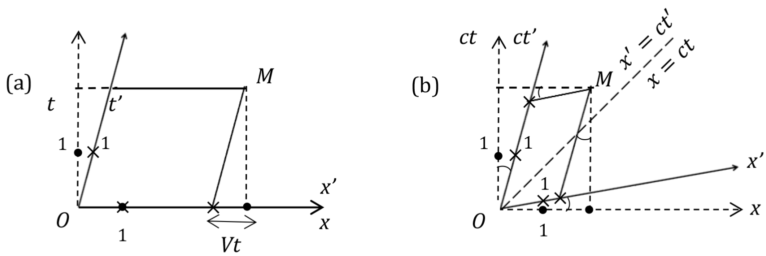


(a) système en chute libre : les objets « flottent » et la lumière va en ligne droite à la vitesse c ; (b) système dans le champ de pesanteur ; (c) système en dehors du champ de pesanteur mais accéléré ; chute des corps, déviation de la lumière, etc. identiques en (b) et (c) si $\vec{a} = -\vec{g}$.

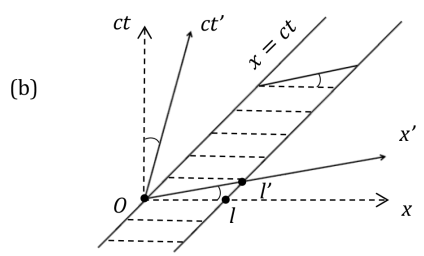
Planche I.1. *Les expériences d'Arago et de Michelson ; le principe d'équivalence d'Einstein*



Référentiels inertiels R (axes x, y en pointillés) et R' (axes x', y' en traits pleins) en mouvement par rapport à R représentés à $t = 0$ dans R ainsi que les horloges censées indiquer les temps t et t'.

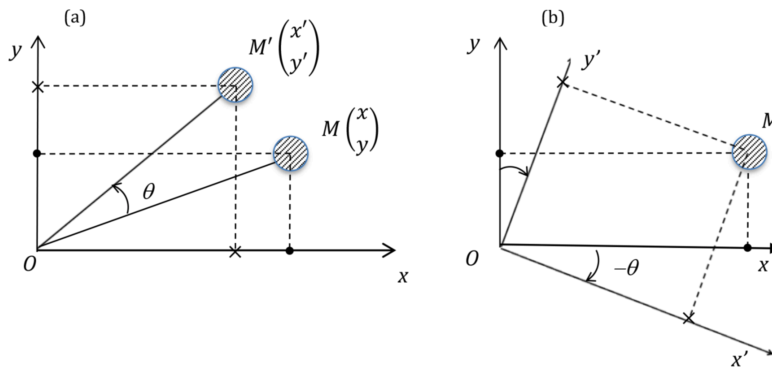


Représentation dans le plan des axes x, t, (orthogonaux par convention) et x', t' avec leurs unités. Construction donnant les coordonnées (points sur les axes) et les coordonnées primes (croix sur les axes). En (b) les axes t, t' et x, x', font entre eux un angle V/c.

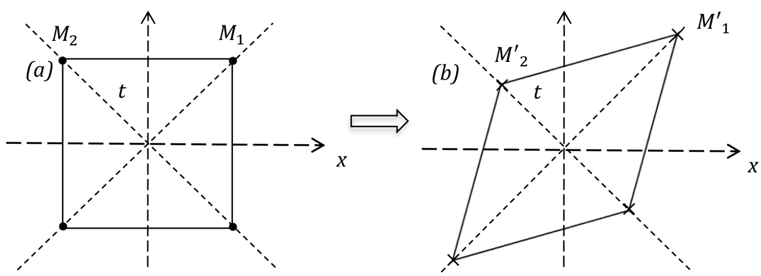


Train d'onde $0 < x - ct < l$ dans R vu comme $0 < x' - ct' < l' = l(1 + V/c)$ dans R'. En 1900, Poincaré établit la relation $E' = E(1 - V/c)$ pour les énergies (voir chapitres 1 et 2 paragraphe 3).

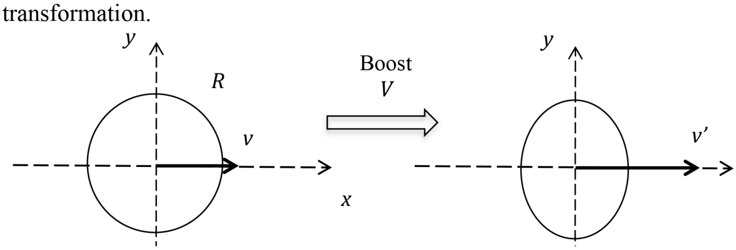
Planche I.2. *Comparaison des transformations a)* $x' = x - Vt, t' = t, y' = y, z' = z$ *(« Galilée ») et (b)* $x' = x - Vt, t' = t - Vx/c^2, y' = y, z' = z$ *(Lorentz 1895 ; Poincaré 1900 ; V/c«1)*



(a) Rotation active d'angle θ ; (b) Rotation passive inverse d'angle $-\theta$. Les deux transformations correspondent à : $x' = x\cos\theta - y\sin\theta\,, y' = y\cos\theta + x\sin\theta$.

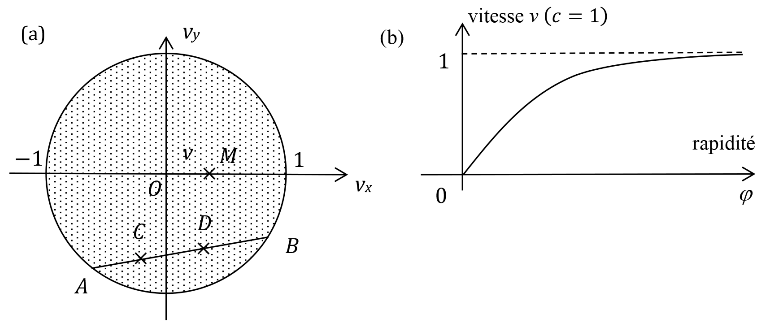


TL active $x \to x' = x + Vt,\ t \to t' = t + Vx$ $(c = 1, V \ll 1)$, ou $x' \pm t' = (1 \pm V)(x \pm t)$: dilatation dans la direction $x = t$ (si $V > 0$) et contraction dans la direction $x = -t$. Les axes x', t' de la planche I.2 sont déduits des axes x, t par cette transformation.



La TL active $x' = x + Vt, t' = t + Vx, y' = y, z' = z$, transforme la sphère d'équation $(x - vt)^2 + y^2 + z^2 = R^2$ en un ellipsoïde $(x' - v't')^2(1 + vV)^2 + y'^2 + z'^2 = R^2$, avec $v' = (v + V)/(1 + vV) \sim v + V(1 - v^2)$. Dans son article de 1905, Poincaré adopte le point de vue actif à propos des TL de 1904 (voir chapitres 3 et 5).

Planche I.3. *Transformations actives et passives. Exemples*

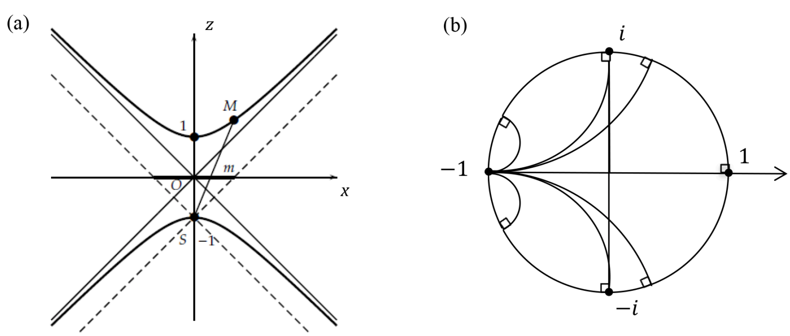


a) Espace des vitesses $v_x = x/t\,, v_y = y/t,\ v < 1$ en unités de c. Sur la « ligne droite » AB, la distance est : $d(C, D) = |\ln[CA/CB{:}\,DA/DB]|$. L'espace et la distance d sont laissés invariants par les transformations linéaires sur x, y, t qui conservent $x^2 + y^2 - t^2 = 0$ (transformations projectives du plan v_x, v_y qui conservent le cercle $v = 1$ et la notion de droite).

b) Graphe des vitesses v en fonction de la rapidité φ définie par :

$$\varphi = d(O, M) = \ln[(1 + v)/(1 - v)] \text{ ou } v = \tanh\varphi.$$

La distance $d(C, D)$ est la rapidité relative des vitesses $\vec{v}_C = \overrightarrow{OC}$ et $\vec{v}_D$ (rapidité dans le référentiel où $\vec{v}_C = \vec{0}$).



a) Représentation en coupe de l'hyperboloïde à deux nappes $Q = x^2 + y^2 - z^2 = -1$ et du disque $x^2 + y^2 < 1$ obtenu par projection de la nappe supérieure sur le plan Oxy à partir de $S(0,0,-1)$. La métrique hyperbolique $dx^2 + dy^2 - dz^2$ en M devient $4\big(1 - (x^2 + y^2)\big)^{-2}(dx^2 + dy^2)$ en m.

b) Représentation du disque dans le plan complexe $z = x + iy$ (disque de Poincaré). Les « lignes droites » (géodésiques de la métrique) sont des trajectoires circulaires orthogonales au cercle $|z| = 1$, par exemple les « droites parallèles » issues d'un point « à l'infini » (sur le cercle).

Planche I.4. *Deux modèles de géométrie hyperbolique (de Lobatchevski) à deux dimensions (groupe de symétrie SO(2,1))*

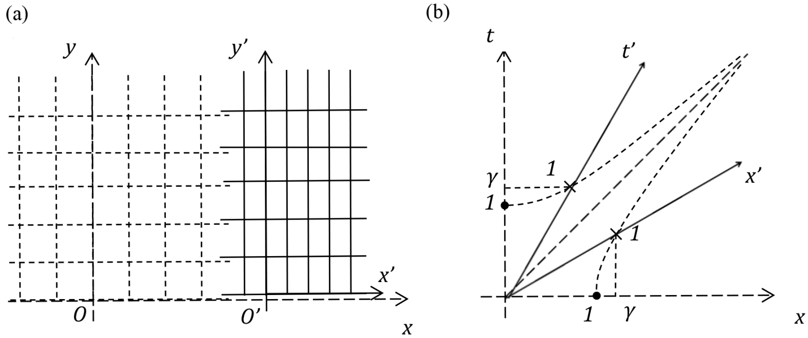
Transformations de Lorentz finies ($c = 1, V < 1$) :

$$x' = \gamma(x - Vt), t' = \gamma(t - Vx), y' = y, z' = z\ ;\ \gamma = 1/\sqrt{1 - V^2}$$

Écrites par Lorentz en 1904, elles ont été mises sous cette forme (avec $V = -\varepsilon$) par Poincaré en 1905 (voir chapitres 3 et 4). Elles conservent $t^2 - x^2$ et équivalent à :

$$x' - t' = \lambda(x - t),\ \ x' + t' = \lambda^{-1}(x + t)\ ;\ \lambda = \sqrt{(1 + V)/(1 - V)}$$

(a) (b)



(a) Référentiels inertiels *R* (axes en pointillés) et *R'* (axes en traits pleins) en mouvement à la vitesse *V* par rapport à *R* représentés à l'instant *t* : $OO' = Vt$. Un point fixe de *R'* correspond à $x = Vt + \gamma^{-1}x'$: contraction apparente (dans *R*) du référentiel *R'* dans la direction *x*.

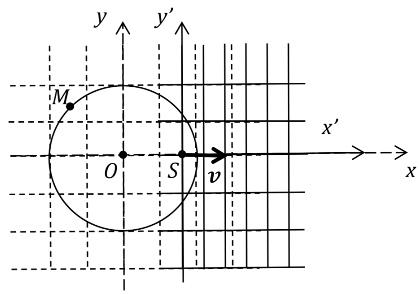
(b) Axes x, t (orthogonaux par convention) et x', t' avec leurs unités. En pointillés l'axe $x = t$ ($x' = t'$) et les hyperboles $t^2 - x^2 = \pm 1$.

Lien avec les TL de 1895 « infinitésimales » :

$$x' = x - Vt, t' = t - Vx\ ; (V \ll 1)$$

Comme ces TL changent $t \mp x$ en $(1 \pm V)(t \mp x)$ (dilatations inverses sur $t + x$ et $t - x$, il est clair qu'une TL finie doit multiplier $t - x$ par un facteur λ et $t + x$ par un facteur λ^{-1}. Si on pose $V = \tanh\varphi$ (φ rapidité, voir planche I.4), alors : $\lambda = e^{\varphi}$.

Planche I.5. *Transformations de Lorentz finies et infinitésimales*



Représentation à l'instant t dans le référentiel R (pointillés) de :

i) L'onde sphérique de rayon ct émise par une source mobile S lors de son passage en O à l'instant $t = 0$.

ii) La position de la source : $OS = vt$.

iii) Le référentiel R' associé à la source (traits pleins) ; il est vu comme contracté dans la direction x par un facteur $\gamma^{-1} = \sqrt{1 - v^2/c^2}$; $\gamma = 2$ sur la figure.

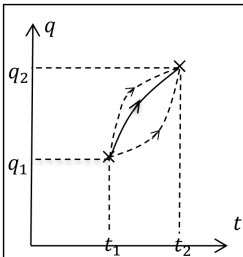
Le raisonnement de Poincaré est subtil. Il consiste à remarquer que pour le système d'axes x', y' contracté, la sphère $OM = ct$ (t fixé) apparaît comme un ellipsoïde de demi-grand axe γct et demi-petit axe ct (S est donc son foyer).
Pour ce système contracté, la distance de S à un point de l'ellipsoïde (M de coordonnées x, y, z dans R) est (après un petit calcul) :

$$d' = \sqrt{\gamma^2(x - vt)^2 + y^2 + z^2} = c\gamma(t - vx/c^2).$$

Elle s'écrit aussi $d' = ct'$ où $t' = \gamma(t - vx/c^2)$ est le temps local introduit par Lorentz pour $V = v$.

La relation $d' = ct'$ exprime donc que la vitesse de propagation de l'onde dans le référentiel R' est égale à c comme dans R (ou que le temps local est introduit de sorte que cette vitesse soit c dans R').

Planche I.6. *Le lien entre contraction et temps local* $t' = \gamma(t - \nu x/c^2)$ *illustré par Poincaré, par exemple dans son cours à l'ESPT en 1912*



Soit q une variable de position, $\dot{q}$ sa vitesse. Par analogie avec le principe de Fermat en optique géométrique, Hamilton caractérise en 1834 le mouvement observé (trait plein sur la figure) par un principe d'extremum relatif à l'action S :

$S = \int_{t_1}^{t_2} L(q,\dot{q},t)dt\ ;\ t_1, t_2, q_1, q_2$ fixés.

L'équation du mouvement est alors (équation de Lagrange) :

$$\dot{p} = \frac{dp}{dt} = \frac{\partial L}{\partial q} \quad \text{avec} \quad p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} \quad .$$

L : lagrangien ; p : moment conjugué (de q) ; $H = p\dot{q} - L$: hamiltonien.
Quand L ne dépend pas explicitement de t, H est constant et représente l'énergie E.

Exemple 1. Mécanique newtonienne ($q \equiv \vec{r}$). Charge électrique e dans un potentiel $V(\vec{r})$ ($\vec{E}(\vec{r}) = -\overrightarrow{\text{grad}}\, V$ est le champ électrique) :

$$L = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 - eV\ ; \quad \vec{p} = m\vec{v}\ ; \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = e\vec{E}\ ; \quad E = \frac{1}{2}m\vec{v}^2 + eV.$$

Exemple 2. Mécanique relativiste. Particule libre.

$$L = -mc^2\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}\ ; \quad \vec{p} = \gamma m\vec{v}\ ; \qquad E = \gamma mc^2; \quad \gamma = 1/\sqrt{1 - \vec{v}^2/c^2}.$$

La quantité de mouvement $\gamma m\vec{v}$ a été introduite en 1904 par Lorentz ainsi que l'équation de la dynamique $d\vec{p}/dt = \vec{F}$ (voir chapitre 3). En 1905, Einstein introduit l'énergie $E = \gamma mc^2$ et Poincaré introduit le lagrangien L en lien avec l'invariance de l'action ($Ldt \propto \sqrt{dt^2 - d\vec{r}/c^2}$, voir chapitres 3 et 5 paragraphes 6,7). La mécanique relativiste n'a été pleinement comprise que vers 1911 (voir annexe 6) après les travaux de Poincaré, Einstein, Planck, Minkowski, Abraham et Laue.

Remarques :
i) La mécanique lagrangienne s'étend aux équations de champs, par exemple aux équations de Maxwell (Schwarzschild 1903, Poincaré 1905, voir chapitre 5, paragraphe 2).

ii) L'invariance relativiste des équations pour les particules et les champs est liée à l'invariance de l'action dont elle découle. En 1918, Emmy Noether associe les grandeurs conservées à l'invariance de l'action par un groupe de symétrie.

Planche I.7. *Introduction à la mécanique lagrangienne*