Introduction

À l'heure où les moyens de calcul sont de plus en plus performants, la modélisation numérique s'est considérablement développée dans tous les secteurs de la société. Pour une structure donnée, elle permet, à partir d'un état initial, de prévoir son évolution, d'étudier des phénomènes mis en jeu en accédant à des grandeurs qui ne sont pas mesurables, ou encore de développer des prototypes virtuels pour améliorer un processus de conception. La physique appliquée, et notamment l'électromagnétisme en basse fréquence, dont il est question dans cet ouvrage, n'a pas échappé à cette règle. Aujourd'hui, des logiciels de simulation performants sont mis à la disposition des étudiants, des ingénieurs et des chercheurs. Il est clair que pour utiliser au mieux un outil, même dans le domaine de la modélisation numérique, il faut bien en connaître les fondements et les principes. Dans ce contexte, il nous a semblé intéressant de proposer un ouvrage suceptible d'appréhender, dans les meilleures conditions, le cheminement permettant de construire ces modèles numériques.

La modélisation des phénomènes électromagnétiques repose sur deux équations aux dérivées partielles, dites « équations de Maxwell », qui sont :

$$\mathbf{Rot\ E} = -\partial \mathbf{B} / \partial t$$

$$\mathbf{Rot\ H} = \mathbf{J} + \partial \mathbf{D} / \partial t$$

À ces deux équations, il faut bien entendu ajouter des lois de comportement décrivant la réponse des milieux matériels aux champs électromagnétiques, qui sont associés à des phénomènes physiques comme la polarisation diélectrique, la conduction électrique, le ferromagnétisme, etc. Enfin, pour que le problème soit bien posé, il faut le compléter par des conditions aux limites, que le domaine d'étude soit fini ou infini. Ce problème, simple en apparence, composé de quelques équations, ne connaît pas de solution analytique, sauf dans le cas de géométrie élémentaire avec des lois de comportement linéaires.

La solution exacte du problème n'étant pas accessible, il existe deux possibilités pour obtenir une solution approchée :

– soit formuler des hypothèses sur la géométrie, les lois de comportement des matériaux et la répartition spatiale des champs électromagnétiques. L'objectif est de rendre la résolution analytique possible. Cette démarche nécessite une très grande expertise sur le système étudié de la part du « modélisateur », de manière à effectuer les « bonnes hypothèses ». Si ces dernières ne sont pas valides, le risque est très grand d'aboutir à une solution de mauvaise qualité, très éloignée de la solution exacte du problème initial. Par ailleurs, cette approche n'est pas toujours possible si des phénomènes complexes, comme les non-linéarités, sont prédominants ;

– soit reformuler le problème initial sous forme discrète, conduisant à un système d'équations algébro-différentielles. On obtient alors une solution approchée au prix d'une quantité de calculs importante, mais qui peut facilement être traitée par les moyens de calcul dont on dispose aujourd'hui. Cette reformulation, qui nécessite peu ou pas d'hypothèses, est obtenue *via* la mise en œuvre de méthodes numériques. La plus répandue, dans le domaine de l'électromagnétisme, est la méthode des éléments finis.

Dans cet ouvrage, nous nous proposons de nous focaliser sur la seconde approche, souvent dénommée « calcul de champ électromagnétique », en détaillant la mise en œuvre de la méthode des éléments finis en électromagnétisme basse fréquence. Nous nous proposons d'expliciter la démarche en partant des équations vérifiées par les champs électromagnétiques dans le domaine continu, pour arriver à un système d'équations qui sera résolu à l'aide d'un calculateur. Cette démarche, souvent appelée « discrétisation », sera menée avec un souci permanent de maintenir un lien entre la physique, c'est-à-dire les propriétés des champs électromagnétiques, et l'analyse numérique, au travers de la méthode des éléments finis.

Aussi, cet ouvrage s'adresse principalement aux étudiants, ingénieurs et chercheurs du domaine du génie électrique. Ils pourront mieux comprendre les tenants et les aboutissants des logiciels (libres ou commerciaux) qui modélisent le comportement des champs électromagnétiques. Ils auront ainsi la possibilité de mieux utiliser ces outils et, de ce fait, de bien en connaître les limites. Cet ouvrage s'adresse également aux étudiants, ingénieurs et chercheurs dans le domaine de l'analyse numérique qui souhaitent mieux comprendre le lien qui existe entre les méthodes numériques et la physique dans le domaine de l'électromagnétisme.

Même si cet ouvrage donne peu d'informations sur l'implantation numérique, il fournit tous les éléments nécessaires pour comprendre les fondements théoriques. Il permet également de concevoir le lien qui existe entre la physique et les méthodes numériques et, par conséquent, entre les applications et les logiciels utilisés.

Les équations de Maxwell, énoncées plus haut, permettent d'étudier tout phénomène électromagnétique. Il est néanmoins possible, pour certaines applications en basses fréquences, de les décliner en régime dit « statique » ou « quasistatique ». Sous certaines hypothèses, ces problèmes plus simples conduisent à des solutions égales ou très proches de celles qui seraient obtenues en utilisant les équations de Maxwell complètes. Ils permettent, après discrétisation par une méthode numérique, d'obtenir des systèmes d'équations de tailles plus réduites ayant des propriétés mathématiques facilitant leur résolution.

Les approximations par des problèmes en régime statique ou quasistatique sont largement utilisées dans de nombreux domaines, comme les réseaux de transport d'énergie, les machines électriques, l'électronique de puissance, le contrôle non destructif, etc. Dans cet ouvrage, nous nous focaliserons plus particulièrement sur les trois problèmes statiques que sont l'électrostatique, l'électrocinétique (lorsque les charges électriques se déplacent à vitesse constante, les champs sont indépendants du temps) et la magnétostatique. Dans le cas quasistatique, les équations de Maxwell peuvent se décliner sous la forme de la magnétoquasistatique (plus souvent nommée « magnétodynamique ») et de l'électroquasistatique. En l'occurrence, nous nous intéresserons à la magnétodynamique. En revanche, pour ce qui concerne les problèmes électroquasistatiques, ils ne seront pas abordés, mais les développements restent similaires à ceux employés dans le cas de la magnétodynamique.

Cet ouvrage comporte quatre chapitres, correspondant chacun à une étape de la démarche conduisant à la discrétisation des équations de Maxwell.

Le chapitre 1 a pour objectif de poser les différents problèmes en régime statique et en régime magnétodynamique qui seront résolus par la suite. Pour chaque problème, les équations d'équilibre sont rappelées ainsi que les lois de comportement et les conditions aux limites des champs électromagnétiques. Un rappel des propriétés de ces champs permet de mettre également en évidence leur comportement à l'interface entre deux milieux, ainsi que la nature de leurs formes intégrales. Un point clé de ce chapitre concerne la définition de grandeurs électriques et magnétiques, que l'on appelle « termes sources », et qui sont à l'origine de la création des champs électromagnétiques. Ces termes peuvent être situés à l'intérieur du domaine d'étude (charges électrostatiques, inducteurs, aimants permanents) ou bien imposés sur la frontière du domaine (forces électromotrices ou magnétomotrices, flux de la densité de courant ou de l'induction magnétique).

Le chapitre 2 est consacré à l'introduction des espaces fonctionnels associés aux opérateurs vectoriels que sont le gradient, le rotationnel et la divergence. Ces opérateurs étant utilisés pour la mise en équation des problèmes statiques et quasistatiques, ils permettent de définir les espaces fonctionnels auxquels appartiennent les différents champs électromagnétiques. Une analyse est faite sur les propriétés des espaces fonctionnels et, plus particulièrement, sur les images et les noyaux en lien avec la topologie du domaine étudié. De ces propriétés découle alors, tout naturellement, la notion de potentiels scalaire et vectoriel, très employés comme intermédiaire pour la résolution des problèmes statiques et quasistatiques, qui sera introduite au chapitre 3. La notion de jauge est également présentée. Elle permet d'assurer l'unicité d'un champ qui vérifie une équation définie par un seul opérateur vectoriel. Les conditions de jauge seront très utiles, par la suite, pour assurer l'unicité des potentiels de manière que le problème soit bien posé. Elles sont également utilisées dans la construction de termes sources.

Le chapitre 3 porte sur les formulations en potentiels pour les problèmes statiques et pour la magnétodynamique. L'introduction de ces potentiels permet, dans le cas des problèmes statiques, de réduire le nombre d'inconnues puisque l'on passe alors de deux champs inconnus à un potentiel inconnu. Ce potentiel peut être de nature scalaire ou vectorielle. On obtient alors, pour chaque problème, deux formulations en potentiel dites « scalaire » ou « vectorielle ». Dans le cas de la magnétodynamique, deux potentiels sont utilisés en fort lien avec ceux introduits pour les problèmes statiques. On en déduit alors deux formulations dites « électrique » et « magnétique ».

L'introduction de ces potentiels n'est pas nécessairement directe et nécessite une reformulation des termes sources du problème initial, qu'ils soient volumiques ou imposés sur la frontière du domaine. La première partie de ce chapitre est consacrée à cette reformulation. Le nombre de sources est souvent limité, de manière à se focaliser sur l'essentiel, c'est-à-dire sur une méthode systématique d'imposition des termes sources. Néanmoins, comme le montrent les exemples traités, la méthodologie s'applique sans difficulté à des problèmes avec un plus grand nombre de sources, en appliquant le théorème de superposition (même si les lois de comportement sont non linéaires).

Le chapitre 4 est consacré à la discrétisation des formulations des problèmes statiques et de la magnétodynamique. Pour mener à bien cette discrétisation, il faut tout d'abord trouver les bons espaces d'approximation dans lesquels on va chercher les solutions approchées. Ces espaces doivent être de dimension finie pour permettre un traitement par un calculateur. Dans le cas des éléments finis, ils sont construits sur la base d'un maillage, c'est-à-dire un découpage en formes élémentaires (tétraèdre, hexaèdre, prisme, etc.) du domaine d'étude. Un champ est alors parfaitement défini par un vecteur qui regroupe les coefficients de la base de l'espace d'approximation et qui constitue les degrés de liberté à déterminer. Ces espaces, de dimension finie, doivent être inclus dans les espaces fonctionnels auxquels appartiennent les champs électromagnétiques. C'est-à-dire qu'ils doivent respecter leurs propriétés, introduites au chapitre 2. Cette condition conduit à des approximations de champs physiquement acceptables au sens où ils vérifient les conditions de continuité. Les éléments finis de Whitney sont actuellement les plus employés et engendrent des espaces permettant une véritable interprétation physique des degrés de liberté, qui sont alors des flux, des circulations, des densités volumiques. De plus, l'imposition des conditions de jauge se fait naturellement ainsi que le calcul des termes sources. Il faut noter que, dans cet ouvrage, nous limiterons nos développements à des éléments finis du premier ordre pour des maillages basés sur des tétraèdres. Des approches très similaires peuvent être appliquées avec des fonctions d'ordre plus élevé et des éléments de formes autres (hexaèdre, prisme, pyramide, etc.). L'introduction des formes discrètes des champs dans les formulations en potentiels des problèmes statiques et de la magnétodynamique ne permet pas de construire un système d'équations. Nous nous proposons d'utiliser la méthode des résidus pondérés, qui permet de transformer un problème initial, basé sur des équations locales, en un problème basé sur des équations intégrales. Pour chacune des formulations en potentiel, développées au chapitre 3, nous employons la méthode des résidus pondérés, couplée aux éléments finis de Whitney, pour construire un système d'équations à résoudre, qui constitue alors le modèle numérique.