

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
<b>Partie 1. Les processus usuels en files d'attente</b> . . . . .	3
<b>Chapitre 1. Le processus de Poisson</b> . . . . .	5
1.1. Rappel sur la loi exponentielle . . . . .	5
1.1.1. Définitions . . . . .	5
1.1.2. Propriétés de la loi exponentielle. . . . .	6
1.1.2.1. Loi sans mémoire. . . . .	6
1.1.2.2. Minimum de lois exponentielles indépendantes. . . . .	7
1.1.2.3. Somme de lois exponentielles indépendantes . . . . .	9
1.1.2.4. Somme géométrique de variables exponentielles . . . . .	10
1.2. Processus de Poisson . . . . .	12
1.2.1. Définitions . . . . .	12
1.2.2. Propriétés du processus de Poisson . . . . .	14
1.2.2.1. Processus sans mémoire. . . . .	14
1.2.2.2. Répartition des points d'un processus de Poisson. . . . .	15
1.2.2.3. Superposition de processus de Poisson . . . . .	16
1.2.2.4. Subdivision d'un processus de Poisson. . . . .	17
1.3. Exercices . . . . .	18
<b>Chapitre 2. Les chaînes de Markov.</b> . . . . .	23
2.1. Chaînes de Markov en temps discret . . . . .	23
2.1.1. Définitions . . . . .	23

---

2.1.1.1. Processus aléatoire . . . . .	23
2.1.1.2. Définition de chaîne de Markov à temps discret . . . . .	24
2.1.1.3. Équation de Chapman-Kolmogorov. . . . .	27
2.1.2. Évolution dans le temps du vecteur stochastique . . . . .	28
2.1.2.1. Équations d'état. . . . .	28
2.1.2.2. Calcul de la puissance d'une matrice . . . . .	29
2.1.2.3. Chaîne ergodique. . . . .	29
2.1.2.4. Distribution limite . . . . .	30
2.1.3. Comportement asymptotique . . . . .	31
2.1.3.1. Distribution stationnaire. . . . .	31
2.1.3.2. Théorème sur l'ergodicité. . . . .	32
2.1.4. Temps de séjour dans un état . . . . .	34
2.1.5. Chaîne en temps retourné . . . . .	35
2.1.6. Chaîne de Markov réversible . . . . .	36
2.1.7. Critère de Kolmogorov. . . . .	36
2.2. Chaînes de Markov en temps continu . . . . .	37
2.2.1. Définitions . . . . .	37
2.2.1.1. Définition de chaîne de Markov en temps continu . . . . .	37
2.2.1.2. Temps de séjour dans un état . . . . .	38
2.2.1.3. Équation de Chapman-Kolmogorov. . . . .	39
2.2.2. Évolution dans le temps . . . . .	40
2.2.2.1. Intensités de transition. . . . .	40
2.2.2.2. Générateur stochastique infinitésimal. . . . .	41
2.2.2.3. Équation d'état . . . . .	42
2.2.3. Résolution de l'équation d'état . . . . .	43
2.2.3.1. Solution de l'équation d'état . . . . .	43
2.2.3.2. Calcul de l'exponentielle d'une matrice carrée . . . . .	43
2.2.3.3. Discrétisation d'une chaîne de Markov en temps continu . . . . .	44
2.2.4. Comportement asymptotique . . . . .	44
2.2.4.1. Distribution stationnaire. . . . .	44
2.2.4.2. Théorème sur l'ergodicité. . . . .	44
2.3. Processus de naissance et de mort . . . . .	45
2.3.1. Définition. . . . .	45
2.3.2. Générateur stochastique infinitésimal . . . . .	45
2.3.3. Distribution stationnaire . . . . .	46
2.4. Exercices . . . . .	47

<b>Partie 2. Les files d'attente . . . . .</b>	<b>53</b>
<b>Chapitre 3. Les files d'attente usuelles . . . . .</b>	<b>55</b>
3.1. Processus d'arrivée des clients dans une file . . . . .	55
3.1.1. Le processus de Poisson . . . . .	55
3.1.2. Utilisation de la loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$ . . . . .	56
3.1.3. Loi exponentielle de la durée . . . . .	57
3.2. Les systèmes d'attente . . . . .	59
3.2.1. Notation des systèmes d'attente . . . . .	59
3.2.2. Lois de Little. . . . .	60
3.2.3. Trafic offert . . . . .	62
3.3. File d'attente M/M/1 . . . . .	62
3.3.1. Distribution stationnaire . . . . .	63
3.3.2. Caractéristiques de la file M/M/1. . . . .	64
3.3.3. Introduction d'un facteur d'impatience . . . . .	66
3.4. File d'attente M/M/ $\infty$ . . . . .	67
3.5. File d'attente M/M/n/n . . . . .	68
3.5.1. Distribution stationnaire . . . . .	69
3.5.2. Formule d'Erlang B. . . . .	69
3.5.3. Caractéristiques de la file d'attente M/M/n/n. . . . .	69
3.6. File d'attente M/M/n . . . . .	70
3.6.1. Distribution stationnaire . . . . .	71
3.6.2. Formule d'Erlang C. . . . .	71
3.6.3. Caractéristiques de la file d'attente M/M/n . . . . .	72
3.7. File d'attente M/GI/1 . . . . .	72
3.7.1. Distribution stationnaire . . . . .	73
3.7.2. Caractéristiques de la file d'attente M/GI/1. . . . .	75
3.8. Exercices . . . . .	76
<b>Chapitre 4. Les réseaux de files d'attente à forme produit . . . . .</b>	<b>81</b>
4.1. Les réseaux de Jackson . . . . .	82
4.1.1. Définition d'un réseau de Jackson . . . . .	82
4.1.2. Distribution stationnaire . . . . .	83
4.1.3. Cas particulier du théorème de Jackson pour un réseau ouvert . . . . .	86
4.1.4. Généralisation des réseaux de Jackson : les réseaux BCMP . . . . .	86

---

4.2. Les réseaux de Whittle . . . . .	87
4.2.1. Définition d'un réseau de Whittle . . . . .	87
4.2.2. Distribution stationnaire . . . . .	90
4.2.3. Propriétés d'un réseau de Whittle . . . . .	90
4.3. Exercice . . . . .	91
<b>Partie 3. Les télétrafics . . . . .</b>	<b>93</b>
<b>Chapitre 5. Notion de télétrafic . . . . .</b>	<b>95</b>
5.1. Le télétrafic et ses objectifs . . . . .	95
5.2. Définitions . . . . .	96
5.2.1. Grandeurs en télétrafic . . . . .	96
5.2.2. Sources et ressources . . . . .	97
5.2.3. Sollicitations et occupations . . . . .	98
5.2.4. Trafics . . . . .	99
5.2.4.1. Phénomène directionnel du trafic . . . . .	99
5.2.4.2. Trafic écoulé et trafic offert . . . . .	100
5.2.4.3. Variation temporelle du trafic . . . . .	101
5.3. Mesure et prévision de trafic . . . . .	103
5.3.1. Trafic et qualité de service . . . . .	103
5.3.2. Mesure du trafic . . . . .	104
5.3.3. Modèle markovien du trafic . . . . .	105
5.3.4. Économie et prévision du trafic . . . . .	105
5.4. Exercices . . . . .	106
<b>Chapitre 6. Sollicitation et occupation de ressources . . . . .</b>	<b>109</b>
6.1. Nombre infini de sources . . . . .	109
6.1.1. Distribution des sollicitations en temps continu . . . . .	109
6.1.1.1. Processus de Poisson des sollicitations . . . . .	109
6.1.1.2. Interarrivées . . . . .	110
6.1.1.3. Nombre de sollicitations . . . . .	111
6.1.2. Distribution des sollicitations en temps discret . . . . .	112
6.1.2.1. Processus de Bernoulli des sollicitations . . . . .	112
6.1.2.2. Interarrivées . . . . .	113
6.1.2.3. Nombre de sollicitations . . . . .	114

6.1.3. Distribution des durées d'occupation . . . . .	115
6.1.3.1. Durées de service i.i.d. . . . .	115
6.1.3.2. Durées de service exponentielles . . . . .	115
6.1.3.3. Durées de service constantes . . . . .	116
6.1.4. Distribution des sources occupées . . . . .	117
6.2. Nombre fini de sources . . . . .	118
6.2.1. Modélisation par un processus de naissance et de mort. . . . .	118
6.2.2. Distribution des sollicitations . . . . .	119
6.3. Irrégularité et hasard du trafic . . . . .	121
6.3.1. Irrégularité du trafic . . . . .	121
6.3.2. Trafic de pur hasard . . . . .	121
6.4. Récapitulation . . . . .	122
6.5. Exercices sur les sollicitations et les occupations . . . . .	123

## **Chapitre 7. Le télétrafic des systèmes à perte . . . . . 125**

7.1. Systèmes à perte . . . . .	126
7.1.1. Définitions . . . . .	126
7.1.2. Encombrement et perte. . . . .	126
7.1.2.1. Probabilité d'encombrement . . . . .	126
7.1.2.2. Probabilité de perte. . . . .	127
7.1.2.3. Comparaison . . . . .	127
7.2. Modèle d'Erlang . . . . .	129
7.2.1. Nombre infini de ressources. . . . .	129
7.2.2. Nombre fini de ressources. . . . .	130
7.2.3. Sur la formule d'Erlang B . . . . .	132
7.2.4. Principe de dimensionnement. . . . .	134
7.3. Modèle d'Engset. . . . .	135
7.3.1. Nombre suffisant de ressources. . . . .	135
7.3.2. Nombre insuffisant de ressources . . . . .	136
7.3.3. Sur la formule des pertes selon Engset . . . . .	139
7.4. Systèmes imparfaits à perte . . . . .	139
7.4.1. Probabilité de perte d'un système imparfait à accessibilité limitée et constante . . . . .	139
7.4.2. Pertes dans un système à accessibilité limitée et variable . . . . .	140
7.5. Exercices . . . . .	140

<b>Chapitre 8. Le télétrafic des systèmes à attente</b> . . . . .	<b>145</b>
8.1. Système à attente . . . . .	145
8.1.1. Description . . . . .	145
8.1.2. Caractéristiques des attentes . . . . .	146
8.2. Modèle d'Erlang . . . . .	147
8.2.1. File d'attente de longueur infinie . . . . .	147
8.2.2. Sur la formule d'Erlang C . . . . .	148
8.2.3. Distribution des attentes . . . . .	149
8.2.3.1. Nombre de sollicitations en attente . . . . .	149
8.2.3.2. Délais d'attente . . . . .	150
8.3. Modèle à capacité d'attente finie . . . . .	152
8.3.1. File d'attente de longueur finie . . . . .	152
8.3.2. Limitation du délai d'attente . . . . .	153
8.4. Modèle de Palm . . . . .	154
8.4.1. File d'attente M/M/n/N . . . . .	154
8.4.2. Caractéristiques des trafics . . . . .	155
8.5. Modèle à distribution générale des durées d'occupation . . . . .	156
8.5.1. À partir de la formule de Pollaczek-Khintchine . . . . .	156
8.5.2. Occupation à durée constante . . . . .	156
8.6. Exercices . . . . .	157
<b>Partie 4. Corrigés des exercices</b> . . . . .	<b>163</b>
<b>Exercices du chapitre 1</b> . . . . .	<b>165</b>
<b>Exercices du chapitre 2</b> . . . . .	<b>173</b>
<b>Exercices du chapitre 3</b> . . . . .	<b>187</b>
<b>Exercice du chapitre 4</b> . . . . .	<b>199</b>
<b>Exercices du chapitre 5</b> . . . . .	<b>203</b>
<b>Exercices du chapitre 6</b> . . . . .	<b>207</b>

---

<b>Exercices du chapitre 7</b> . . . . .	209
<b>Exercices du chapitre 8</b> . . . . .	213
<b>Annexe 1. Table d'Erlang B</b> . . . . .	221
<b>Annexe 2. Table d'Erlang C</b> . . . . .	225
<b>Liste des notations</b> . . . . .	229
<b>Bibliographie</b> . . . . .	239
<b>Index</b> . . . . .	241