

Table des matières

Avant-propos	1
Introduction	3
Chapitre 1. Espaces vectoriels topologiques	7
1.1. Semi-normes	7
1.2. Espace vectoriel topologique : définition et propriétés	8
1.2.1. Topologie et semi-normes	9
1.2.2. Espace vectoriel topologique	10
1.2.3. Espace vectoriel topologique localement convexe	11
1.2.4. Espace vectoriel topologique métrisable	12
1.2.5. Convergence dans un espace vectoriel topologique	13
1.2.6. Applications et formes linéaires	14
1.3. Topologie limite inductive	15
Chapitre 2. Espaces des fonctions tests	17
2.1. Notations multi-indices	17
2.1.1. Formule de Leibniz	18
2.2. Fonction C^∞ à support compact	18
2.2.1. Support d'une fonction continue	18
2.2.2. Espaces des fonctions tests (d'essais)	19
2.2.3. Convergence dans $\mathcal{D}(\Omega)$	23
2.2.4. Produit de convolution	24

2.2.4.1. Définitions	24
2.2.4.2. Quelques propriétés de convolution	26
2.2.5. Quelques résultats de densité	28
2.3. Exercices corrigés	30

Chapitre 3. Distributions sur un ouvert de \mathbb{R}^d 41

3.1. Définitions	41
3.1.1. Définition fonctionnelle	41
3.1.2. Définition d'ordre	42
3.1.3. Ordre d'une distribution	43
3.2. Exemples de distributions	43
3.2.1. Distributions régulières	43
3.2.2. Distributions non régulières	45
3.2.2.1. Distribution de Dirac	45
3.2.2.2. La valeur principale de $\frac{1}{x}$	46
3.2.3. Autres exemples	49
3.2.3.1. Mesure de Radon	50
3.2.3.2. Distributions positives	50
3.2.3.3. Distribution d'ordre infini	50
3.3. Convergence des suites de distributions	51
3.3.1. Définition et exemples	52
3.3.2. Autres résultats de convergence	55
3.4. Exercices corrigés	59

Chapitre 4. Opérations sur les distributions 79

4.1. Multiplication par une fonction C^∞	79
4.1.1. Définition et quelques propriétés	79
4.1.2. Exemples	80
4.1.3. Propriétés de convergence	81
4.1.4. Résolution des équations $xT = 0$, $xT = 1$ et $xT = S$	82
4.2. Dérivation d'une distribution	85
4.2.1. Définition et exemples	85
4.2.1.1. Définition	85
4.2.1.2. Exemples	87
4.2.2. Continuité de l'opérateur de dérivation	90
4.2.3. Résolution des équations $T' = 0$ et $\partial_{x_i} T = 0$	90
4.2.4. Formule des sauts en dimension 1	93
4.2.4.1. Fonction de classe C^k par morceaux	93
4.2.4.2. Formule des sauts	94

4.2.5. Dérivation/intégration sous le crochet de dualité	100
4.3. Transformations des distributions	102
4.3.1. Translation d'une distribution	102
4.3.2. Dilatation d'une distribution	104
4.3.3. Parité d'une distribution	104
4.3.4. Homogénéité d'une distribution	104
4.4. Exercices corrigés	105

Chapitre 5. Support d'une distribution 125

5.1. Restriction et prolongement d'une distribution	125
5.1.1. Partitions de l'unité	125
5.1.2. Localisation et recollement d'une distribution	126
5.2. Support d'une distribution	128
5.2.1. Définition	128
5.2.2. Exemples	129
5.2.3. Propriétés du support	130
5.3. Distributions à support compact	134
5.3.1. Définition et propriétés	134
5.3.1.1. Topologie de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$	135
5.3.1.2. Prolongement de distribution à support compact	135
5.3.2. Distributions à support ponctuel	138
5.4. Exercices corrigés	139

Chapitre 6. Convolution des distributions 151

6.1. Définition et exemples	151
6.1.1. Convolution de deux distributions régulières	151
6.1.2. Convolution d'une distribution et une fonction de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$	153
6.1.3. Densité de $\mathcal{D}(\Omega)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega)$	155
6.1.4. Convolution de deux distributions	157
6.1.5. Quelques exemples	159
6.2. Propriétés de la convolution	161
6.2.1. Support d'une convolution	161
6.2.2. Continuité séquentielle du produit de convolution	162
6.2.3. Associativité et convolution	163
6.2.4. Dérivation et convolution	164
6.2.5. Translation et convolution	165
6.2.6. Étude algébrique de $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$	166
6.3. Exercices corrigés	167

Chapitre 7. Espaces de Schwartz et distributions tempérées	179
7.1. Espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	179
7.1.1. Définitions et exemples	179
7.1.2. Topologie et convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	183
7.1.2.1. Topologie de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	183
7.1.2.2. Convergence dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	184
7.1.3. Premières propriétés de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	185
7.1.4. Opérateurs dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	187
7.1.4.1. Opérateurs de dérivation et de multiplication	187
7.1.4.2. Convolution dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	188
7.2. Les distributions tempérées	190
7.2.1. Définition et exemples	190
7.2.2. Convergence dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	193
7.2.3. Premières propriétés de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	194
7.2.4. Opérateurs dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	195
7.2.4.1. Opérateurs de dérivation et de multiplication	195
7.2.4.2. Convolution dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	196
7.3. Exercices corrigés	196
Chapitre 8. Transformation de Fourier	205
8.1. Transformation de Fourier dans $L^1(\mathbb{R}^d)$	205
8.1.1. Définition et premières propriétés	206
8.1.2. Transformation de Fourier et opérations	211
8.1.2.1. Transformation de Fourier et dérivation	211
8.1.2.2. Transformation de Fourier et translation	214
8.1.2.3. Transformation de Fourier et dilatation	215
8.1.2.4. Formule d'échange	216
8.1.2.5. Transformation de Fourier et convolution	217
8.1.3. Inversion de la transformation de Fourier	218
8.2. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$	219
8.2.1. Définition et premières propriétés	220
8.2.2. Transformation de Fourier et opérations	222
8.2.2.1. Transformation de Fourier et dérivation	222
8.2.2.2. Transformation de Fourier et translation	223
8.2.2.3. Transformation de Fourier et dilatation	223
8.2.3. Inversion de la transformation de Fourier	223
8.2.4. Transformation de Fourier et convolution	227
8.3. Transformation de Fourier dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$	229
8.3.1. Définition et premières propriétés	229
8.3.1.1. Transformation de Fourier et dérivation	231

8.3.2. Inversion de la transformation de Fourier	232
8.3.3. Transformation de Fourier dans $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$	233
8.3.4. Transformation de Fourier et formule sommatoire de Poisson . . .	235
8.3.5. Transformation de Fourier et convolution	238
8.4. Exercices corrigés	239
Chapitre 9. Applications aux EDO et EDP	263
9.1. Transformation de Fourier partielle	263
9.2. Solutions tempérées d'équations différentielles	263
9.3. Solutions fondamentales de certaines EDP	264
9.3.1. Équation de la chaleur	265
9.3.2. Équation des ondes	266
Annexe. Évaluations	269
Bibliographie	275
Index	277