Avant-propos

Cet ouvrage regroupe des notes de cours rédigées dans l'esprit de présenter les distributions dans un sens aussi clair que possible, sans les surcharger de notions encore plus intéressantes ; et de ne pas s'écarter du but principal, qui est de donner aux étudiants un support de cours plus ou moins simple et qui contient les résultats les plus essentiels et les plus importants sur les distributions. Pour le lecteur intéressé par plus de détails sur les distributions, une liste bibliographique est donnée à la fin de l'ouvrage.

A.1. Sommaire

Cet ouvrage s'organise en neuf chapitres et une annexe dont presque tous sont composés d'un fondement théorique sous forme de définitions, propositions et théorèmes illustrés par des exemples et d'une série d'exercices avec leurs corrigés.

Dans le chapitre 1, on présente l'essentiel sur les espaces vectoriels topologiques qui permettra de construire une topologie sur l'espace de fonctions tests.

Le chapitre 2 est réservé à la présentation et à l'étude de $\mathcal{C}_c^\infty$: l'espace des fonctions tests se termine par quelques résultats de densité qui seront utiles par la suite.

Dans le chapitre 3, on introduit la notion de distributions à travers des définitions équivalentes et des exemples variés.

Le chapitre 4 porte sur quelques opérations sur les distributions, à savoir la multiplication par une fonction de classe $\mathcal{C}^\infty$, la dérivation d'une distribution et les transformations classiques sur les distributions.

Le chapitre 5 est dédié à la notion du support d'une distribution et ses propriétés permettant une classification des distributions selon leurs supports.

Dans le chapitre 6, on expose le principe fondamental de régularisation par convolution. Plus précisément, on définit la convolution des distributions et on donne ses propriétés.

Dans le but de définir des distributions tempérées, dans le chapitre 7, on commence par définir les espaces de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et donner quelques propriétés dont on aura besoin dans la partie 2 de ce chapitre où l'on présente $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'espace des distributions tempérées ainsi que ses propriétés fondamentales.

Vu l'importance de la transformation de Fourier, on a consacré le chapitre 8 à cette notion dans des espaces fonctionnels différents, à savoir l'espace $L^1(\mathbb{R}^d)$, l'espace de Schwartz $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et enfin l'espace dual $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ des distributions tempérées.

Le chapitre 9 est une occasion d'appliquer toute cette théorie exposée pour la résolution de quelques équations différentielles.

On termine par une annexe où l'on donne une série d'exercices de synthèse qui sera l'occasion d'une auto-évaluation.

A.2. Public concerné

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de master en mathématiques ainsi qu'aux étudiants des sciences physiques. Il s'adresse également aux étudiants du cycle de préparation à l'agrégation de mathématiques. Il leur donne les définitions et notions les plus élémentaires pour se familiariser avec le calcul distributionnel telles la notion de dérivation, de limite d'une suite ou de série de distributions ainsi que d'autres opérations sur les distributions. Par des exemples bien choisis, ils peuvent voir la différence entre ce qui est classique pour les fonctions ordinaires et ce qui est distribution pour ce qu'on appelle ordinairement des « fonctions généralisées », c'est-à-dire des distributions.

Je tiens enfin à remercier toutes les personnes qui m'ont apporté leur aide, de près ou de loin, pour l'élaboration de cet ouvrage. Je remercie spécialement mes étudiants qui ont contribué à la saisie de ces notes. Je serais reconnaissant à ceux de mes lecteurs qui me feront parvenir leurs remarques sur cette première édition.

Introduction

L'apparition de la théorie des distributions remonte aux années 1945-1950 et est due à Laurent Schwartz. Cette théorie fournit un cadre général au formalisme agréable pour étudier des espaces fonctionnels et des équations aux dérivées partielles. Depuis lors, les distributions constituent le cadre naturel dans lequel beaucoup d'analystes se placent, reprenant les notations et les idées de Schwartz. Une bonne familiarité avec le langage des distributions est devenue presque indispensable à un analyste. Schwartz lui-même avait bien conscience que le principal mérite de son approche ne résidait pas dans l'introduction d'outils nouveaux, mais dans une synthèse claire et accessible de recettes multiples qui étaient, déjà auparavant, employées dans des contextes divers.

Plusieurs raisons sont à l'origine de l'introduction de la notion de distribution. Certaines sont d'ordre purement physique (expérimental même), alors que d'autres sont des raisons plus mathématiques qui consistent d'une part à donner un sens à quelques objets manipulés en physique, par exemple la mystérieuse « fonction de Dirac », introduite par Dirac (1929) qui vaut 0 partout, sauf en 0 où elle vaut $+\infty$, et dont l'intégrale est égale à 1 (en violation de toutes les règles de la théorie de l'intégration de Lebesgue). Non seulement Dirac utilisait cette fonction à des fins de calcul formel, mais encore il se permettait de la dériver à volonté, se contentant de remarquer que les dérivées successives étaient *de plus en plus singulières*. Elles consistent d'autre part à argumenter les opérations, surtout de dérivation, faites dans le cadre des équations aux dérivées partielles.

Pour motiver la généralisation de l'aspect ponctuel des fonctions et permettre le passage de la notion de fonction à la notion de *fonctionnelle*, on donne ici un exemple physique classique concernant la mesure de la température d'un fil rectiligne « en un point donné ». On peut se convaincre que pour des raisons évidentes, une telle mesure n'est jamais réalisable parfaitement. Tout thermomètre, quel que soit le principe physique utilisé pour la mesure, possède *une extension spatiale* qu'il est impossible de réduire à celle d'un point : ce qu'il faudrait réaliser pour pouvoir mesurer la température en *un point* x_0. On peut cependant admettre, dans le cas d'une mesure réaliste de température, que le thermomètre prend en compte toutes les températures dans un « voisinage » du point x_0 selon une fonction de sensibilité ϕ_0 de telle sorte que pour une fonction de répartition $T(x)$ de la température le long de la barre (fonction dont on ignore *a priori* ce qu'elle vaut *vraiment* en un point précis de la barre), on puisse dire que la température mesurée T sera en fait $T_0 = \displaystyle\int T(x)\phi_0(x)\,\mathrm{d}x$. Si l'on effectuait la mesure en un autre point x_1, on obtiendrait $T_1 = \displaystyle\int T(x)\phi_1(x)\,\mathrm{d}x$, etc.

On voit que la température mesurée T, dans l'hypothèse où les fonctions $T(x)$, ϕ_0, ϕ_1 etc. sont suffisamment régulières, se présente sous la forme d'un expression linéaire en la fonction de sensibilité ϕ. On peut noter aventageusement cette expression sous la forme :

$$\langle T, \phi \rangle = \int T(x)\phi(x)\,\mathrm{d}x$$

Lorsque le produit $x \mapsto T(x)\phi(x)$ est Lebesgue intégrable, cette écriture est parfaitement justifiée. Cependant, dans beaucoup de cas concrets, la grandeur physique en question (ici il s'agirait de $T(x)$) se révèle être trop *singulière* pour que l'intégrale écrite puisse avoir un sens quelconque avec un choix réaliste pour la fonction ϕ. L'ensemble des fonctions ϕ prend le nom d'ensemble de fonctions *tests* ou fonctions *d'essai*. La mesure d'une grandeur physique T est alors représentée par le « crochet » : $\langle T, \phi \rangle$ indépendamment d'une forme intégrale ou non pour cette expression. L'ensemble des grandeurs T *mesurables* par les fonctions d'essai prend alors le nom générique de *distributions*.

Quel doit être le minimum exigé pour les objets ainsi considérés ?

1) L'ensemble des fonctions d'essai constitue un *espace vectoriel de fonctions*. C'est-à-dire que toute combinaison linéaire à coefficients complexes de fonctions d'essai est encore une fonction d'essai.

2) L'ensemble des distributions est l'ensemble des formes linéaires continues sur l'espace vectoriel des fonctions d'essai.

3) Le résultat de la mesure de T par ϕ est alors le nombre réel ou complexe $\langle T, \phi \rangle$.

L'un des autres intérêts principaux de la théorie des distributions est de permettre la construction d'un calcul différentiel qui prolonge le calcul différentiel ordinaire et pour lequel toute distribution est indéfiniment dérivable. Cette théorie est devenue un outil essentiel, notamment dans l'étude des équations aux dérivées partielles. Elle a aussi permis une modernisation mathématique pour de nombreux phénomènes physiques.