

Introduction

L'élasticité cristalline sera abordée et décrite dans la première partie de cet ouvrage. C'est une vieille dame arrivée à sa maturité au début du XX^e siècle. Elle descend de deux branches ancestrales : les « cristallosapiens » et les « élastosapiens ».

L'aïeul de la première branche peut être identifié comme le minéralogiste René Just Haüy, fondateur de la cristallographie géométrique au XVIII^e siècle, qui, par l'observation du faciès du clivage de cristaux comme la calcite, déduisit qu'ils étaient constitués de petits empilements ordonnés qu'il nomma molécules intégrantes. Le concept de maille atomique n'apparaîtra qu'au XIX^e siècle avec les travaux de Gabriel Delafosse, un de ses disciples. Peu de temps après, Auguste Bravais posa l'hypothèse d'une structure réticulaire des cristaux en appliquant les principes de la géométrie, il dénombra quatorze types différents de réseaux cristallins rendant compte des propriétés d'anisotropie et de symétrie des cristaux. Enfin, au début du XX^e siècle, Max von Laue confirma expérimentalement les travaux de Bravais en utilisant la diffraction des rayons X.

En ce qui concerne la seconde branche, le précurseur est indubitablement Robert Hooke (dont le nom est si compliqué à orthographier par les étudiants en mécanique des matériaux) au XVII^e siècle, en établissant la relation linéaire entre force et déplacement à partir du chargement de ressorts. Ensuite, les notions de contrainte et de déformation ont été formulées par Thomas Young au tout début du XIX^e siècle. Peu après, on doit à Augustin-Louis Cauchy le formalisme 3D de la loi de Hooke généralisée grâce à la notion de constantes d'élasticité et du calcul tensoriel appliqué à la mécanique des milieux continus.

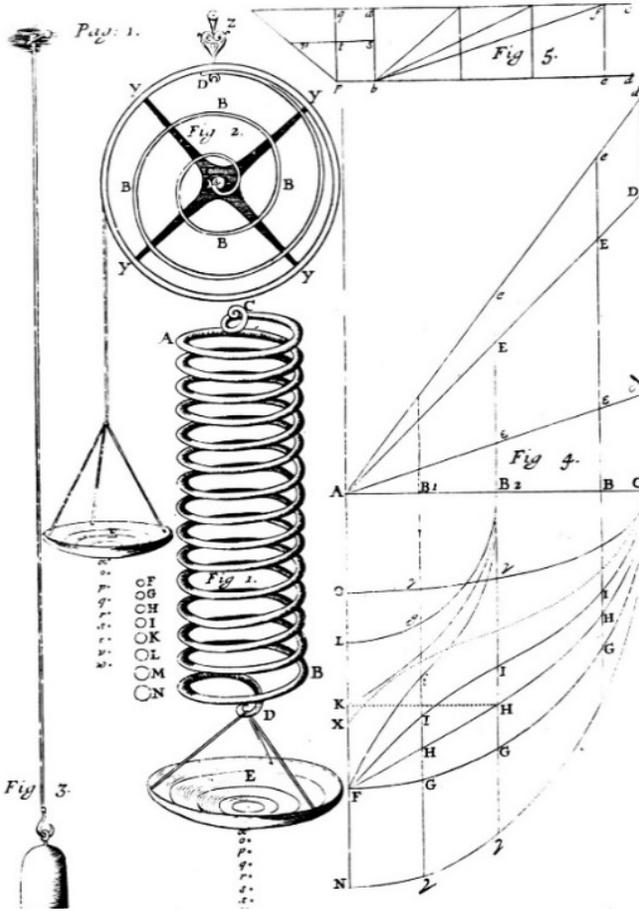


Figure 1. Illustration de Robert Hooke sur l'élasticité des métaux (Potentia restitutiva, 1678)

Après cet aperçu historique, tout est en place au début du XX^e siècle pour donner lieu à une descendance nombreuse et variée.

Tout d'abord, Clarence Zener a quantifié rigoureusement l'anisotropie élastique de la symétrie cubique, nous reviendrons en permanence sur ce concept dans cette partie. Pour les autres symétries, différentes approches ont également été proposées.

La caractérisation expérimentale s'est également étoffée. Si, précédemment, les essais quasi statiques simples comme l'essai de traction permettaient de caractériser l'élasticité, l'utilisation de méthodes physiques dédiées utilisant les ondes élastiques de volume ou de surface a permis des mesures plus précises pour les grandeurs macroscopiques : ultrasons, méthode dynamique résonante ou diffusion Brillouin.

La mécanique des milieux continus hétérogènes a eu un très grand développement afin de passer de l'élasticité du monocristal et de ses constantes à l'élasticité des agrégats (polycristaux). À partir des modèles historiques en champs moyens de Woldemar Voigt et Adolph Reuss, de nombreuses approches ont été déclinées. Les progrès numériques récents permettent d'optimiser les méthodes en champs complets.

Enfin, l'apparition récente des nanostructures a demandé de zoomer au niveau des interactions interatomiques pour décrire l'élasticité à une échelle fine ou de prédire les propriétés des matériaux massifs grâce aux méthodes dynamiques moléculaires.

Ces approches à différentes échelles ainsi que la masse de données expérimentales, théoriques ou simulées, sur de nombreuses catégories de matériaux ne permettent pas d'avoir une vue globale décrivant simplement l'élasticité cristalline.

Une approche phénoménologique est proposée dans cet ouvrage afin de pallier ce manque : à l'échelle macroscopique, l'utilisation de l'anisotropie et d'une représentation adimensionnelle permet de simplifier l'écriture mathématique de l'élasticité conventionnelle rappelée dans un premier chapitre et de classer les matériaux cristallins en fonction de leur anisotropie, quelle que soit leur rigidité. Cette approche sera présentée dans un deuxième chapitre pour les symétries cubique et hexagonale, pour lesquelles nous possédons assez de données relativement fiables. Nous verrons en particulier que l'élasticité cristalline adimensionnelle ne fait intervenir que le concept d'anisotropie, encore faut-il la décrire correctement.

En fin de chapitre, le cas des sous-structures de la symétrie cubique nous emmènera vers une première transition d'échelle du macroscopique au nanoscopique, c'est-à-dire à l'échelle atomique. En partant de l'analogie du comportement élastique d'un monocristal aux deux échelles, le troisième chapitre présentera

cette transition qui passe par l'écriture d'une nouvelle loi de Hooke (« nano-Hooke » ?) portant sur la rigidité spatiale au niveau atomique.

Nous aborderons ensuite une seconde transition d'échelle pour passer de l'élasticité du monocristal au polycristal. Le quatrième chapitre y sera consacré. Nous aborderons d'abord les cas historiques d'homogénéisation en champs moyens et il sera ensuite proposé une homogénéisation très simplifiée, mais permettant de classer phénoménologiquement ces différentes approches plus ou moins complexes de la littérature. Nous verrons que l'anisotropie reste encore le paramètre incontournable pour comparer élasticité des polycristaux et approches mécaniques.

Enfin, un dernier chapitre sera consacré à l'illustration de cas particuliers d'élasticité cristalline grâce aux données obtenues par une méthode vibratoire spécifique et performante. Celle-ci sera d'abord décrite, puis il sera proposé de multiples exemples d'évolution de l'élasticité en relation avec des aspects structuraux ou physiques pour des matériaux fonctionnels.

Dans la seconde partie de l'ouvrage, une approche lagrangienne des vibrations sera développée. Le but est de proposer une démarche unique décrivant les vibrations de géométries simples.

Si le calcul numérique est incontournable pour prévoir les vibrations de structures complexes sous des chargements très variables à partir de données d'élasticité des matériaux composant ces structures, le problème posé ici est inverse : à partir des vibrations de structures et de chargements les plus simples possible (torsion de plaque, flexion de poutre et de plaque, traction-compression sur barreau cylindrique), la détection des fréquences de résonance permet de remonter aux données de l'élasticité des matériaux, cristallins ou non. Quatre chapitres y seront consacrés.

Encore faut-il mettre en place un type d'expérimentation performant comme décrit dans la première partie et proposer un formalisme le plus juste possible pour relier élasticité et vibrations. On peut trouver différentes approches développées au début du XX^e siècle dans la littérature, mais cette partie développe une approche unique pour traiter au mieux le problème : écriture du lagrangien d'un système dynamique et application du principe d'Hamilton afin de minimiser l'énergie.

Le cas de matériaux massifs, (multi) revêtus ou à gradient de propriétés sera traité pour répondre aux besoins actuels de plus en plus diversifiés. Des exemples de caractérisations expérimentales viendront ponctuer les différents cas étudiés afin d'aérer et d'illustrer les différents calculs.

Un dernier chapitre abordera enfin le couplage entre vibrations et contraintes internes macroscopiques et proposera une méthode alternative à l'analyse de ces dernières.