

Avant-propos

Les auteurs sont redevables à de nombreuses personnes et institutions qui ont contribué à bien des égards à la rédaction de cet ouvrage. La plupart du matériel présenté dans ce livre a fait l'objet de cours à différents niveaux et différents publics et a été continûment amendé et amélioré en fonction des différents retours de la part de collègues et d'étudiant-e-s.

Environ la moitié des chapitres a été initialement conçue pour les étudiant-e-s du parcours *Ingénierie financière* du master MIMSE (Ingénierie mathématique, statistique, économique) créé en 2007 et porté conjointement par les Universités Bordeaux 1, Bordeaux 2 et Montesquieu Bordeaux IV, qui ont ensuite fusionné pour devenir maintenant l'Université de Bordeaux. Les étudiant-e-s de ce parcours pouvaient provenir soit l'une licence d'économie soit d'une licence de mathématiques. Des parties de ces cours ont bénéficié de l'expérience et de la collaboration d'autres enseignant-e-s comme François Dufour ou Christine Marois.

Certains chapitres de ce livre sont aussi issus des notes d'une unité d'enseignement sur les processus stochastiques, données depuis 2013 aux étudiant-e-s du parcours Mathématiques et applications du master de recherche à la Faculté des sciences relevant de l'Université de Monastir. Dans le cadre de ce parcours, et à l'initiative d'Ali Gannoun et de Leila Ben Abdelghani Bouraoui, les supports du cours donné à Montpellier ont également été adaptés en 2017 pour une autre unité d'enseignement sur les mathématiques financières à la Faculté des sciences de Monastir.

D'autres chapitres ont été initialement conçus comme parties de cours de processus des parcours Biostatistique et mathématiques de l'information et de la décision du master de mathématiques à l'Université de Montpellier.

Les auteurs remercient chaleureusement toutes les personnes et institutions qui ont contribué à la réalisation de cet ouvrage.

Nous dédions cet ouvrage à Leila Ben Abdelghani Bouraoui et Ali Gannoun.

Introduction

Depuis les travaux de Black-Scholes-Merton [BLA 73] en 1973, la conception, l'analyse et le développement des produits et des services financiers complexes n'ont cessé de requérir, en plus d'une connaissance approfondie des théories financières, une maîtrise de la théorie des probabilités et des processus stochastiques.

Cet ouvrage présente les éléments de base de cette théorie et particulièrement celle des martingales en temps discret, et il montre comment elle s'applique à l'évaluation et à la couverture des produits dérivés tels que les options dans les marchés financiers. Il existe de nombreux livres dans la littérature traitant des mathématiques financières et de l'évaluation des options (voir par exemple [LAM 97, SHR 04, VIN 04]). La grande majorité de ces ouvrages considère uniquement des modèles en temps continu et utilisent intensivement le calcul d'Itô. De trop rares livres tels que [SHR 03] présentent des études dans le cas discret, mais en vue de préparer les lecteur-ric-e-s pour la compréhension de l'analyse des marchés financiers en temps continu. La principale originalité du présent livre est qu'il est entièrement consacré au temps discret et présente en détail une construction mathématique rigoureuse des outils nécessaires à l'évaluation des options dans les marchés financiers. Le seul prérequis est une connaissance d'un cours de base en probabilité. Des aspects théoriques et numériques sont étudiés dans ce livre, et ce, à travers plusieurs exemples et exercices entièrement corrigés.

À la connaissance des auteurs, ce livre est la première référence incluant simultanément un cours mathématique et plusieurs exercices avec solutions détaillées sur les martingales discrètes et leur application aux marchés financiers, ainsi que des travaux pratiques avec corrigés en utilisant le logiciel R. Une importance particulière est donnée à l'exploration du modèle de Cox Ross et Rubinstein en temps discret.

Ce livre s'adresse aux étudiant-e-s du niveau master, spécialisé-e-s en mathématiques appliquées ou en finance, aux doctorant-e-s, aux enseignant-e-s, aux cher-

cheur·euse·s en économie ou en science actuarielle, ainsi qu'aux professionnel·elle·s œuvrant dans divers métiers de la finance, ou toute autre personne intéressée par une construction mathématique rigoureuse et abordable des outils et des notions utilisés en mathématiques financières, ou par les applications de la théorie des martingales en finance. Enfin, les travaux pratiques de gestion optimale de portefeuille du chapitre 5 ainsi que le traitement des options américaines dans le chapitre 7 peuvent servir d'introduction élémentaire aux problèmes de contrôle stochastique.

Le plan de cet ouvrage est le suivant. Le chapitre 1 rappelle des notions et des notations de base de probabilité et de variables aléatoires, notamment discrètes, ainsi qu'une première introduction à la notion de processus stochastiques. Le chapitre 2 est consacré à l'introduction et à l'étude de la notion d'espérance conditionnelle, qui est une notion clé dans la définition des martingales et le calcul d'options financières. L'objet du chapitre 3 est de faire une première introduction à un exemple intéressant de processus stochastique, à savoir la marche aléatoire simple symétrique, et ce, avec un minimum de formalisme. Ce chapitre peut être lu de façon autonome. Dans le chapitre 4, on définit et on caractérise la notion de martingale en temps discret et on en étudie certaines propriétés.

À partir du chapitre 5, on commence à parler de mathématiques financières proprement dites. On définit l'essentiel du vocabulaire financier tel que la notion d'actif financier de stratégie d'investissement et celle d'arbitrage, et on commence à faire le lien avec les martingales. On introduit également l'exemple type de marché financier discret : le modèle binomial de Cox Ross et Rubinstein qui sert de fil rouge dans tous les chapitres suivants. En particulier, on traite sous forme de travaux dirigés la question de la gestion optimale de portefeuille dans ce modèle. Il s'agit d'une version discrète du célèbre problème de Merton originellement posé dans le modèle continu de Black et Scholes [MER 69]. Dans le chapitre 6, on introduit et on étudie la première catégorie importante et particulière d'actifs conditionnels, à savoir les options européennes. Il s'agit de l'exemple le plus simple d'actif financier dont l'exercice est soumis à la réalisation d'une certaine condition. On détaille les questions de l'évaluation et de la couverture de ces options dans le cas général d'un marché financier discret, puis dans le cas particulier du modèle de Cox Ross et Rubinstein. Le chapitre 7 est consacré à l'étude d'une famille un peu plus complexe d'actifs conditionnels : les options américaines. À nouveau, on détaille les questions d'évaluation et de couverture de ces options et on fait le lien avec la théorie de l'arrêt optimal, dans le cas général d'un marché financier discret, puis dans le cas particulier du modèle de Cox Ross et Rubinstein.

Les corrigés détaillés de tous les exercices et travaux pratiques sont rassemblées en fin d'ouvrage dans le chapitre 8.