

Table des matières

Avant-propos	1
Chapitre 1. Du côté de la théorie des équations elliptiques	3
1.1. Un peu de vocabulaire	3
1.1.1. Conditions aux limites pour l'équation de Laplace	5
1.1.2. Autres conditions aux limites	6
1.2. Solutions classiques au problème de Laplace	7
1.2.1. Formules de Green	7
1.2.2. Principe du maximum	10
1.3. Solutions faibles	11
1.4. Rappels sur les espaces de Banach et de Hilbert	13
1.4.1. Espaces de Banach	13
1.4.2. Espaces de Hilbert	15
1.5. Espaces de Sobolev	17
1.5.1. Dérivation au sens des distributions	19
1.5.2. Frontière « suffisamment régulière »	25
1.5.3. Dérivation au sens classique ou au sens des distributions ?	27
1.5.4. Un résultat de compacité	28
1.6. Existence de trace et formules d'intégration par parties	28
1.7. Exercices – Énoncés	36
Chapitre 2. Formulations variationnelles et leur résolution	45
2.1. Formulations variationnelles des problèmes de Dirichlet, Neumann et Fourier	45
2.1.1. Problème de Dirichlet homogène	45
2.1.2. Problème de Dirichlet non homogène	48

2.1.3. Problèmes de Neumann et Fourier	49
2.2. Autres exemples de formulations variationnelles	52
2.2.1. Problème à coefficient variable	52
2.2.2. Problèmes elliptiques d'ordre 2	52
2.2.3. Problèmes d'ordre supérieur	53
2.2.4. Données moins régulières	54
2.3. Existence et unicité des solutions faibles	55
2.3.1. Le problème de Neumann	56
2.3.2. Le problème de Dirichlet – L'inégalité de Poincaré	57
2.3.3. Le problème de Dirichlet non homogène	60
2.4. Existence et unicité – Cadre général	62
2.4.1. Le théorème de Lax-Milgram	62
2.4.2. Exemple d'application du théorème de Lax-Milgram pour le laplacien	66
2.4.3. Le problème de Helmholtz	69
2.4.4. Problèmes bien posés	72
2.4.5. Le théorème de Banach-Necas-Babuska	74
2.4.6. Alternative de Fredholm	77
2.5. Quelques propriétés des solutions faibles	79
2.5.1. Principe du maximum	79
2.5.2. Régularité des solutions	81
2.5.2.1. Problème de Dirichlet (frontière C^∞)	82
2.5.2.2. Problème de Neumann (frontière C^∞)	82
2.5.2.3. Problème de Dirichlet homogène (Ω polygone ou polyèdre)	83
2.5.2.4. Problème de Neumann homogène (Ω polygone ou polyèdre)	84
2.5.2.5. Régularité locale de la solution d'un problème de Laplace	85
2.6. Exercices – Énoncés	85

Chapitre 3. Introduction à la méthode des éléments finis 95

3.1. Approximation de Galerkin	95
3.1.1. Cas d'une forme coercive	97
3.1.1.1. Existence, unicité de la solution approchée	97
3.1.1.2. Convergence de l'approximation de Galerkin	98
3.1.2. Cas d'une forme vérifiant les conditions de stabilité et de solvabilité	101
3.1.3. Exemple d'approximation : les bases hilbertiennes	103
3.1.4. Espaces de solutions et de fonctions test différents	104

3.2. Principes de la méthode des éléments finis affines en dimension 2 . . .	106
3.2.1. Maillage	107
3.2.2. Propriétés des fonctions de base globales	109
3.2.3. Norme des éléments de l'espace d'approximation	111
3.2.4. Propriété de matrice creuse	112
3.2.5. Interpolation de Lagrange	112
3.2.6. Caractère local de la méthode des éléments finis	113
3.3. Processus général de construction des éléments finis	117
3.3.1. Éléments finis de Lagrange d'ordre k	117
3.3.2. Exemples d'éléments finis	118
3.3.2.1. Dimension 1	118
3.3.2.2. Dimension 2	119
3.3.2.3. Dimension 3	124
3.3.2.4. Dimension d	125
3.3.3. Construction de l'espace d'approximation	127
3.3.3.1. Maillage	127
3.3.3.2. Construction des fonctions de base globales	128
3.3.4. Exemples d'assemblage en dimension 2	130
3.4. Extension des éléments finis	134
3.4.1. Éléments finis d'Hermite	134
3.4.1.1. Dimension 1	135
3.4.1.2. Dimension 2	135
3.4.2. Éléments finis de type « moment »	136
3.4.3. Construction de l'espace d'approximation	137
3.4.4. Éléments finis vectoriels	138
3.5. Exercices – Énoncés	138

Chapitre 4. Analyse numérique de la méthode des éléments finis 145

4.1. Convergence de la méthode des éléments finis	145
4.1.1. Erreur d'interpolation locale	147
4.1.2. Estimation d'erreur de la méthode des éléments finis	154
4.1.3. Solutions « régulières par morceaux »	158
4.2. Estimateurs d'erreur et raffinement de maillage	161
4.3. Domaines non polyédriques et approximation des données	165
4.3.1. Ouverts non polyédriques	165
4.3.2. Éléments finis isoparamétriques	168
4.3.3. Approximation des données	169
4.4. Exercices – Énoncés	173

Chapitre 5. Aspects concrets de la méthode des éléments finis . . .	187
5.1. Mise en œuvre	187
5.1.1. Maillage pour les éléments finis	188
5.1.2. Calculs élémentaires	191
5.1.3. Assemblage des matrices globales et du second membre	193
5.1.3.1. Assemblage des matrices	193
5.1.3.2. Construction du second membre	194
5.1.4. Élimination des conditions essentielles	197
5.1.4.1. Technique d'élimination réelle	198
5.1.4.2. Technique de pseudo-élimination	198
5.2. Considérations algorithmiques	202
5.2.1. Un cas particulier	202
5.2.2. Le cas général en 2D	203
5.2.3. Le cas général en 3D	207
5.3. Quelques illustrations numériques	209
5.3.1. Équation de Laplace	211
5.3.2. Équation de la diffusion	216
5.3.3. Élasticité bidimensionnelle	218
5.3.4. Quelques outils élémentaires de maillage 2D	224
Annexe 1. Résolution des systèmes linéaires	233
Annexe 2. Corrigés	269
Annexe 3. Formulaire	365
Bibliographie	367
Index	369