

Avant-propos

La simulation numérique est devenue un puissant moyen d'investigation qui prend une place très importante, à côté de l'approche expérimentale classique, dans les sciences et techniques. Dans les domaines de la mécanique, de la physique ou de la chimie, l'utilisation de modèles fondés sur des systèmes d'équations aux dérivées partielles est naturelle (*élastodynamique, acoustique, électromagnétisme, aérodynamique, hydrodynamique, chimie ab initio, etc.*). Plus récemment, ce type de modélisation a fait son apparition dans d'autres domaines tels que la biologie et l'économie (finance en particulier). Hormis quelques cas particuliers, il n'est pas possible de résoudre analytiquement ces systèmes d'équations, et il est donc obligatoire d'avoir recours à des techniques d'approximation. Il en existe un certain nombre : méthodes semi-analytiques, méthodes probabilistes, méthodes des différences finies, méthodes spectrales et méthode des éléments finis pour ne citer que les principales. La méthode des éléments finis, introduite dans les années 1950, a connu depuis de nombreux développements, et est aujourd'hui présente dans de nombreux logiciels de simulation numérique. Tout ingénieur travaillant dans un environnement où la simulation numérique est un outil important, y sera confronté et il doit donc en connaître les principes fondamentaux, voire les derniers raffinements.

Comme toute technique d'approximation, la méthode des éléments finis doit être employée en respectant des règles, incluant notamment des contraintes d'utilisation ainsi que des facteurs de qualité de différentes natures. L'objectif de cet ouvrage est de fournir les éléments nécessaires, allant des plus théoriques au plus concrets, à la maîtrise de ces contraintes et de ces facteurs. Dans cette optique, nous avons souhaité présenter les différents aspects de la méthode : cadre mathématique, analyse numérique et mise en œuvre efficiente en accordant autant d'importance à chacun de ces aspects et en fournissant les points clés ainsi que des éléments supplémentaires correspondant aux situations que l'on rencontre souvent en pratique. Cet ouvrage est consacré à la présentation des concepts fondamentaux de la méthode des éléments

finis pour des problèmes stationnaires elliptiques. Le corps du texte présente les notions élémentaires, à connaître absolument. Quelques résultats complémentaires y sont également proposés. Des exercices avec corrigés, en fin de chapitre et en annexe, permettent d'approfondir les connaissances, et proposent des ouvertures vers des sujets plus avancés.

Les chapitres 1 et 2 sont consacrés à l'étude des problèmes *elliptiques* et, en particulier, à la *théorie variationnelle* des équations elliptiques (contexte de la méthode des éléments finis) qui est exposée dans un cadre fonctionnel rigoureux et requiert des connaissances élémentaires d'analyse. La plupart des outils opérationnels d'analyse fonctionnelle (analyse hilbertienne, théorie des distributions) sont rappelés, permettant une lecture plus aisée à ceux qui ne les connaissent pas. La méthode des éléments finis fait l'objet des chapitres 3 et 4. Nous en donnons, tout d'abord, une présentation concrète sur un exemple à la fois simple et significatif, et dans un second temps, un cadre formel qui permet de construire une grande variété d'éléments finis. Les principaux résultats d'*estimations d'erreurs* sont détaillés. Au chapitre 5, nous étudions les aspects pratiques et algorithmiques de cette méthode, liés à sa *mise en œuvre informatique*, et des *illustrations numériques* réalisées avec Matlab¹ sont fournies à titre d'exemples. En annexe 1 nous présentons quelques considérations élémentaires – mais indispensables – sur la *résolution des systèmes linéaires* et, en particulier, les systèmes linéaires *creux* issus de l'approximation par éléments finis. Nous proposons les corrigés détaillés des exercices en annexe 2. Enfin, en annexe 3, nous rappelons la définition des opérateurs de dérivation usuels.

1. Matlab est une marque déposée par The MathWorks, Inc.