

Table des matières

Avant-propos	1
Introduction	5
Chapitre 1. Décompositions matricielles	31
1.1. Introduction	31
1.2. Survol des principales décompositions matricielles	32
1.3. Décomposition valeur propre-vecteur propre	35
1.3.1. Quelques rappels sur les valeurs propres d'une matrice	35
1.3.2. Décomposition propre et propriétés	38
1.3.3. Cas particuliers des matrices symétriques/hermitiennes	40
1.3.4. Application au calcul des puissances d'une matrice et d'un polynôme de matrice	42
1.3.5. Application au calcul d'une matrice de transition d'état	43
1.3.6. Application au calcul de la fonction de transfert et de la sortie d'un système linéaire à temps discret	44
1.4. Décomposition URV^H	44
1.5. Décomposition en valeurs singulières	46
1.5.1. Définition et propriétés	46
1.5.2. SVD réduite et décomposition dyadique	48
1.5.3. SVD et espaces fondamentaux	51
1.5.4. SVD et pseudo-inverse de Moore-Penrose	52
1.5.5. Calcul d'une SVD	53
1.5.6. SVD et normes matricielles	53
1.5.7. SVD et approximation de rang faible	56
1.5.8. SVD et projecteurs orthogonaux	59

1.5.9. SVD et estimateur des moindres carrés	60
1.5.10. SVD et décomposition polaire	63
1.5.11. SVD et ACP	65
1.5.12. SVD et séparation aveugle de sources	71
1.6. Décomposition CUR	75

Chapitre 2. Produits de Hadamard, de Kronecker et de Khatri-Rao 79

2.1. Introduction	79
2.2. Notations	81
2.3. Produit de Hadamard	82
2.3.1. Définition	82
2.3.2. Propriétés fondamentales et relations basiques	83
2.3.3. Relations entre l'opérateur <i>diag</i> et le produit de Hadamard	84
2.4. Produit de Kronecker	86
2.4.1. Produit de Kronecker de vecteurs	86
2.4.2. Produit de Kronecker de matrices	91
2.4.3. Rang, trace, déterminant et spectre d'un produit de Kronecker	96
2.4.4. Propriétés structurelles d'un produit de Kronecker	99
2.4.5. Inverse et pseudo-inverse de Moore-Penrose d'un produit de Kronecker	100
2.4.6. Décompositions d'un produit de Kronecker	101
2.5. Somme de Kronecker	103
2.6. Convention indicielle	104
2.6.1. Vecteurs et matrices écrits avec la convention indicielle	105
2.6.2. Règles et identités basiques avec la convention indicielle	105
2.6.3. Produits matriciels et convention indicielle	107
2.6.4. Produits de Kronecker et convention indicielle	108
2.6.5. Vectorisation et convention indicielle	111
2.6.6. Formules de vectorisation	112
2.6.7. Vectorisation de matrices partitionnées	116
2.6.8. Traces de produits de matrices et convention indicielle	118
2.7. Matrices de commutation	121
2.7.1. Définition	121
2.7.2. Propriétés	123
2.7.3. Produit de Kronecker et permutation des facteurs	123
2.7.4. Produit multiple de Kronecker et matrices de commutation	125
2.7.5. Produit de Kronecker par bloc	126
2.7.6. Produit de Kronecker fort	129
2.8. Relations entre l'opérateur <i>diag</i> et le produit de Kronecker	129
2.9. Produit de Khatri-Rao	130
2.9.1. Définition	130
2.9.2. Produit de Khatri-Rao et convention indicielle	131

2.9.3. Produit multiple de Khatri-Rao	132
2.9.4. Propriétés	132
2.9.5. Produit de Khatri-Rao et permutation des facteurs	134
2.9.6. Trace d'un produit de matrices et produit de Khatri-Rao	135
2.10. Relations entre vectorisation et produits de Kronecker et de Khatri-Rao	136
2.11. Relations entre produits de Kronecker, de Khatri-Rao et de Hadamard	137
2.12. Applications	144
2.12.1. Dérivées partielles et convention indicielle	144
2.12.2. Résolution d'équations matricielles	152
Chapitre 3. Opérations tensorielles	161
3.1. Introduction	161
3.2. Notation et ensembles particuliers de tenseurs	163
3.3. Notion de tranche	169
3.3.1. Fibres	169
3.3.2. Tranches matricielles et tensorielles	170
3.4. Combinaison de modes	172
3.5. Tenseurs partitionnés ou tenseurs blocs	174
3.6. Tenseurs diagonaux	176
3.6.1. Cas d'un tenseur $\mathcal{X} \in \mathbb{K}^{[N;I]}$	176
3.6.2. Cas d'un tenseur carré	177
3.6.3. Cas d'un tenseur rectangulaire	178
3.7. Matricisation	178
3.7.1. Matricisation d'un tenseur d'ordre trois	178
3.7.2. Déploiements matriciels et convention indicielle	180
3.7.3. Matricisation d'un tenseur d'ordre N	181
3.7.4. Matricisation d'un tenseur par bloc d'indices	184
3.8. Sous-espaces associés à un tenseur et rang multilinéaire	185
3.9. Vectorisation	186
3.9.1. Vectorisation d'un tenseur d'ordre N	186
3.9.2. Vectorisation d'un tenseur d'ordre trois	187
3.10. Transposition	189
3.10.1. Définition d'un tenseur transposé	189
3.10.2. Propriétés des tenseurs transposés	189
3.10.3. Transposition et contraction tensorielle	192
3.11. Tenseurs symétriques/partiellement symétriques	193
3.11.1. Tenseurs symétriques	193
3.11.2. Tenseurs partiellement symétriques/hermitiens	194
3.11.3. Formes multilinéaires à symétrie hermitienne et tenseurs hermitiens	197

3.11.4. Symétrisation d'un tenseur	198
3.12. Tenseurs triangulaires	203
3.13. Opérations de multiplication	204
3.13.1. Produit extérieur de tenseurs	205
3.13.2. Multiplication tenseur-matrice	208
3.13.3. Multiplication tenseur-vecteur	212
3.13.4. Produit modes- (p, n)	213
3.13.5. Produit d'Einstein	216
3.14. Tenseurs inverses et pseudo-inverses	223
3.15. Décompositions tensorielles sous forme de factorisations	231
3.15.1. Décomposition propre d'un tenseur carré symétrique	231
3.15.2. Décomposition SVD d'un tenseur rectangulaire	232
3.15.3. Lien entre SVD et HOSVD	233
3.15.4. Décomposition de rang complet	235
3.16. Produit interne, norme de Frobenius et trace d'un tenseur	237
3.16.1. Produit interne de deux tenseurs	237
3.16.2. Norme de Frobenius d'un tenseur	239
3.16.3. Trace d'un tenseur	241
3.17. Systèmes tensoriels et polynômes homogènes	242
3.17.1. Systèmes multilinéaires basés sur le produit mode- n	242
3.17.2. Systèmes tensoriels basés sur le produit d'Einstein	246
3.17.3. Résolution de systèmes tensoriels à l'aide des moindres carrés	248
3.18. Produits de Hadamard et de Kronecker de tenseurs	250
3.19. Extension tensorielle	252
3.20. Tensorisation	254
3.21. Hankélisation	257

Chapitre 4. Valeurs propres et valeurs singulières d'un tenseur . . . 261

4.1. Introduction	261
4.2. Valeurs propres d'un tenseur d'ordre supérieur à deux	264
4.2.1. Différentes définitions des valeurs propres d'un tenseur	264
4.2.2. Tenseurs (semi-)définis positifs/négatifs	273
4.2.3. Tenseurs orthogonalement/unitairement semblables	273
4.3. Meilleure approximation de rang un	275
4.4. Décompositions orthogonales	279
4.5. Valeurs singulières d'un tenseur	280

Chapitre 5. Décompositions tensorielles 283

5.1. Introduction	283
5.2. Modèles tensoriels	284
5.2.1. Modèle de Tucker	285

5.2.2. Modèle de Tucker- (N_1, N)	293
5.2.3. Modèle de Tucker d'un tenseur transposé	294
5.2.4. Décomposition de Tucker et transformée de Fourier	294
5.2.5. Modèle PARAFAC	295
5.2.6. Modèles tensoriels en blocs	314
5.2.7. Modèles tensoriels avec contraintes	317
5.2.8. Modèles TTD, GTTD et CTTD	321
5.3. Exemples de modélisation tensorielle	325
5.3.1. Modélisation d'harmoniques multidimensionnelles	326
5.3.2. Séparation de sources	326
5.3.3. Modélisation d'un système RIF à l'aide de cumulants d'ordre quatre de la sortie	331
Annexe. Variables aléatoires et processus stochastiques	335
Bibliographie	381
Index	401