# Introduction

Pourquoi un tel titre ? Pourquoi *Une histoire des mathématiques*, et pas tout simplement *Histoire des mathématiques* ? Les mathématiques n'ont certainement qu'une seule histoire, mais tout aussi certainement y a-t-il de multiples façons de la raconter.  Mais de quelque manière que ce soit, elles se ressembleront toutes suivant le même fil, celui de l'histoire, et iront du plus simple vers le plus compliqué, car aussi bien dans le domaine pédagogique que dans l'histoire des humains, ces derniers se sont d'abord attaqués aux problèmes les plus simples avant d'oser se frotter aux plus complexes.

Que le lecteur ne s'attende pas à un inventaire complet des différents aspects que peuvent prendre les mathématiques avec leurs histoires en propre, égrenant chaque étape de leurs évolutions. Je n'ai pas décidé de faire une encyclopédie de l'évolution des mathématiques à travers les âges, mon ambition est bien plus modeste. Dans l'arsenal des mathématiques, j'ai choisi quelques aspects dont il me semble qu'ils devraient faire partie du bagage intellectuel de l'honnête citoyen de notre époque, et j'ai recherché pour chacun ce qui en a constitué l'histoire, c'est-à-dire les étapes novatrices, les liens qu'elles tissent avec les autres branches des mathématiques, et les hommes qui y étaient associés.

C'est donc bien modestement que je vous proposerai ma propre version des faits, mélangeant l'aspect historique selon la flèche du temps, et l'aspect pédagogique selon la flèche de la complexité, moi qui ne suis pas mathématicien. Et je compte d'ailleurs beaucoup sur les recherches que la rédaction de cet ouvrage va me contraindre à faire, pour en apprendre un peu plus que ce que je sais, ou crois savoir déjà, de ce domaine qui n'est pas le mien. Et je pense que c'est une excellente raison, car un mathématicien ne pourrait qu'écrire une histoire des mathématiques pour mathématiciens, un lectorat particulièrement réduit qui n'est pas celui que je cherche à intéresser à l'histoire des mathématiques. Le lecteur que je vais essayer de charmer en lui faisant aimer ce qu'il a haï, car c'est le sentiment le plus répandu si j'en juge par les réponses que j'obtiens aux diverses questions autour du thème « Que vous inspire le mot “mathématique” ? » ; ou plus directement : « Aimez-vous les maths ? » ; ou plus sibyllin, pour ne pas dire perfide : « Que pensez-vous des mathématiques ? » ; c'est celui qui a en grippe les mathématiques.

Les mathématiques sont une étrange discipline à bien des égards. N'est-ce pas celle qui laisse le plus souvent de mauvais souvenirs scolaires, bien avant et bien plus que n'importe quelle autre ? N'est-ce pas une pure invention de l'homme qui semble miraculeusement coïncider avec un grand nombre de faits de la nature, ce qui a fait dire à Eugène Wigner (1902-1995) qu'elles sont d'une déraisonnable efficacité dans les sciences de la nature ? On pourrait même enfoncer le clou en parlant d'une insolente efficacité. Jugez plutôt ; pourquoi la simple relation purement mathématique $D^3/T^2$ est un rapport constant entre la période T des planètes du système solaire et D la distance qui les sépare du Soleil ? Vous rendez-vous compte de l'étrangeté du rapport que les mathématiques mettent ici en évidence entre le cube d'une distance et le carré d'un temps caractérisant la trajectoire de chaque planète, toutes logées à la même enseigne dans cette relation mathématique, et bien que ces planètes soient toutes différentes ? Quel rapport y a-t-il entre une invention humaine et la marche des planètes ? Et encore, n'est-ce là qu'un exemple pris au hasard dans un catalogue quasi illimité d'adéquations entre les phénomènes de la nature et les élucubrations de notre cerveau ? Vous seriez sans doute encore plus surpris si l'on découvrait que les règles régissant le déplacement des différentes pièces du jeu d'échecs s'appliquaient aussi à des phénomènes naturels. Pourtant, il s'agit bien de la même chose, les règles du jeu d'échec et les mathématiques sont de la même essence, le produit de la pensée humaine, et les phénomènes de la nature d'un autre domaine, qui existait depuis toujours, donc bien avant notre apparition sur la planète et notre invention des mathématiques.

Les mathématiques sont donc bien une science à part, je veux dire différente des autres. D'ailleurs, sont-elles bien une science, ou plutôt un jeu d'esprit, comme les échecs, les dames, le bridge, ou le go ? Sans doute faut-il s'attarder un peu sur ce qu'est une science, définir ce que recouvre ce mot avant de conclure.

Selon Wikipédia[1] :

> « La science est l'ensemble des connaissances et études d'une valeur universelle, caractérisées par un objet et une méthode fondés sur des observations objectives vérifiables et des raisonnements rigoureux. »

---

1. Voir le site : https://fr.wikipedia.org/wiki/Science.

Cette définition pourrait sans doute assez bien définir les mathématiques si ce n'était que la méthode est fondée sur des observations objectives vérifiables. Ce point précis semble bien ne pas correspondre à la méthode mathématique qui n'observe qu'elle-même. En effet, il lui suffit de ne pas être contradictoire, et qu'importe que cela corresponde ou non à une réalité physique observable. Bon nombre de développements des mathématiques ne correspondent à aucun phénomène physique connu, du moins jusqu'à aujourd'hui, mais sur ce point l'histoire nous enseigne la prudence. En effet, si certaines branches des mathématiques ont été développées pour résoudre des problèmes particuliers ou aider à comprendre certains phénomènes naturels, d'autres développements n'ont été dans un premier temps que des jeux pour mathématiciens sans aucune application pratique jusqu'au jour où leur adéquation à une réalité physique s'est imposée.

Pour Philoscience[2] :

> « La science est une activité de connaissance authentique du monde. »

Authentique du monde ? Voilà qui nous éloigne plus encore de l'abstraction des mathématiques qui ignorent même ce qu'est le monde en dehors d'elles-mêmes. Alors tant pis, les mathématiques ne seront pas une science, mais est-ce vraiment important ? Elle fait peut-être partie d'une autre catégorie de concepts liés à la connaissance. Et, récemment, elle aurait été rejointe par l'informatique dans ce club très fermé des activités intellectuelles qui ne sont pas des sciences. En effet, ces deux disciplines ont énormément de points communs, dont le plus évident est certainement d'être utiles, pour ne pas dire indispensables, à toutes les sciences et même à des domaines bien au-delà des sciences. Pourrait-on aujourd'hui faire de la physique, de la chimie, de la biologie, de la médecine, du commerce, de la finance, etc., sans l'une et l'autre ?

Autre point commun, elles peuvent l'une et l'autre se développer non pas pour être utiles à d'autres domaines, mais pour elles-mêmes, comme lorsque des raisonnements mathématiques ont pour but de créer une formulation qui ne donnerait que des nombres premiers par exemple, ou une démonstration mettant en évidence que pi est un nombre transcendant ou racine de deux, un nombre irrationnel. Cela ne profite, *a priori*, qu'aux mathématiques elles-mêmes, on parle dans ce cas de mathématiques pures. Je n'ai pas encore entendu parler d'informatique pure, mais cela ne saurait tarder, car je sais des recherches faites aux seuls profits de l'informatique elle-même, comme le développement d'algorithmes visant à certifier une séquence d'instructions sans erreurs, intrinsèquement fiable, ou encore un algorithme capable de retrouver une information pertinente au milieu d'une base de données

2. Voir le site : https://philosciences.com/.

gigantesque dans un temps le plus réduit possible, indépendamment du contenu de la base de données, qu'il ait ou non un caractère pratique.

Bien sûr, ces algorithmes « sans but lucratif » *a priori* auront un jour des applications pratiques, même si ce n'est pas le but de leur recherche, mais rien n'est jamais perdu. Lorsque les premiers mathématiciens ont mis au point le mécanisme des opérations fondamentales du calcul (addition, soustraction, multiplication et division), ils n'avaient certainement pas en tête le souci de la cliente qui exploite aujourd'hui ces propriétés à l'étal du commerçant sur le marché de la place du village. Eux, manipulaient des variables abstraites pour établir le mécanisme de l'opération justifiant la justesse de l'algorithme, tandis que la cliente parle de kilogramme de pommes de terre et d'euros avec les procédures qu'ils avaient mises au point et que nous apprenons maintenant dès nos premières années scolaires.

Mais si les mathématiques ne sont pas des sciences comme les autres, ou même pas des sciences du tout, ne sont-elles vraiment que le produit de l'imagination des humains et comment se fait-il, le cas échéant, qu'elles puissent décrire si parfaitement les phénomènes de la nature et même les prédire, puisqu'elles n'auraient aucun rapport avec cette nature ? Tout cela semble incohérent, voilà qui commence bien mal pour les mathématiques qui se flattent de n'exister que par leur cohérence.

Vous entendrez aussi parler de sciences dures et de sciences molles, ou douces, les premières étant celles qui s'occupent de la nature et les secondes les sciences sociales et les sciences humaines. Mais les mathématiques ne rentrent dans aucune des cases, il leur en faut une spécialement pour elles, case qu'elles partageront avec l'informatique, dans l'attente, peut-être, d'autres colocataires. En attendant nous pouvons toujours appeler cette case celle des sciences abstraites, ce qui me semble bien les caractériser puisqu'elles n'ont aucunement besoin de s'appuyer sur du concret pour se justifier, ce sont deux sciences de procédés, de procédures, de méthodes, disons d'algorithmes. Elles traitent toutes deux d'informations, lesquelles nécessitent néanmoins un support matériel pour se stocker et se transmettre ; l'information elle-même, oui, mais pas l'algorithme tant qu'il n'est pas question de le mémoriser ou de le transmettre, car dans ces cas, l'algorithme devient lui-même une variable d'information.

Mais quittons ce domaine philosophique et revenons à l'éventuel lien entre le monde réel et les mathématiques. N'y a-t-il vraiment aucun rapport, entre les mathématiques et le monde réel, celui de la physique et celui de tous les jours, est-ce bien certain ? Eh bien non, reprenons les premières œuvres des « primo-mathématiciens ». Ces primo-mathématiciens définissent les mécanismes de chacune des quatre opérations élémentaires. Ils définissent des règles qui peuvent paraître évidentes aujourd'hui mais qui ne devaient pas leur apparaître aussi simples à cette époque reculée. Quittant l'univers du concret qui était celui dans lequel ils évoluaient avec aisance, ils exploraient l'inconnu, le monde de l'abstraction dans lequel personne avant eux ne s'était aventuré. Sans doute surpris des premiers résultats de leurs élucubrations ils ressentaient certainement le besoin d'appuyer leurs découvertes sur des expérimentations concrètes auxquels ils avaient toujours fait confiance avec bonheur.

D'ailleurs, les scientifiques d'aujourd'hui ne procèdent pas autrement. Ne considèrent-ils pas leurs hypothèses seulement que comme potentiellement acceptables tant qu'une expérience ou une observation, au moins, ne les ont pas validées ? Pour mettre au point la délicate procédure de l'addition nos mathématiciens « primitifs » alignent des petits tas de cailloux, du moins peut-on l'imaginer. Ils dénombrent les cailloux contenus dans chaque tas, appliquent à ces nombres la procédure qu'ils ont mise au point et ils constatent que le nombre total ne varie pas quel que soit la répartition des cailloux dans chaque tas, pas plus qu'en variant l'ordre d'addition des différents tas. D'essais en découvertes, de tentatives différentes en surprises extravagantes, ils découvrent des propriétés merveilleuses à cette procédure d'addition, ce qu'aujourd'hui nous appelons la distributivité, l'associativité, et la commutativité. Mais tout cela en s'appuyant sur des expérimentations concrètes. Ensuite, plus élaborées et plus subtiles, les trois autres opérations révéleront elles aussi des procédures d'exécution à toute épreuve et s'appliquant à toute sorte de nombres capables de représenter des quantités de n'importe quoi, comme plus tard avec l'algèbre de Viet (François, 1540-1603) les littéraux sous forme de lettres de l'alphabet remplaceront les variables caractérisant des termes précis quantifiés. Ces premiers algorithmes du calcul sont universels et capables de s'appliquer à n'importe quel problème pratique pour le résoudre mécaniquement.

Mais il ne vous a pas échappé que ces abstractions se sont développées en parallèle avec, et calqué sur, le modèle physique de ce qu'elles représentaient avec des cailloux, et cela de façon aussi fidèle que le peintre reproduit un paysage sur une toile. Il y a donc bien une corrélation évidente entre ce qui est la genèse de l'abstraction mathématique et le monde réel de la physique.

Les mathématiques étant un temple de cohérence, des excroissances de ces bribes primitives qu'elles étaient à l'origine et aussi loin que l'évolution des mathématiques les a portés, ces excroissances gardent cette harmonieuse corrélation avec les problèmes de physique auxquels elles s'appliquent, car la physique est cohérente, elle aussi. Ayant les mêmes racines, il n'y a donc pas vraiment matière à s'étonner de cette déraisonnable efficacité des mathématiques dans ses applications aux sciences de la nature dont parlait Wigner. Finalement, cette efficacité des mathématiques à décrire les phénomènes physiques n'a donc rien de surprenant, mais, en revanche, le contraire le serait.

Si les prolongements de ces premiers algorithmes mathématiques ont progressé en cohérence, une divergence apparaissant signifierait que la physique devient à un certain niveau de complexité incohérente avec elle-même. Ou plutôt, incohérente avec ses bases, avec ses caractéristiques les plus élémentaires. Et c'est bien ce qui se passe aujourd'hui lorsque, s'appuyant sur la physique newtonienne, les physiciens tentent des excursions au-delà des frontières, à l'intérieur desquelles la physique est restée jusqu'alors cohérente. Dans l'infiniment grand et l'infiniment petit, les effets des mêmes causes ne sont plus les mêmes et leur appliquer les mathématiques calquées sur ce qui n'était qu'une petite partie de la physique, celle dans laquelle on dénombre les cailloux, ne conduit qu'à des aberrations.

Pour de nouvelles physiques, il faudra sans doute créer de nouvelles mathématiques qui leur resteront cohérentes jusqu'à ce que soient peut-être atteintes de nouvelles frontières. Faute de savoir créer ces nouvelles mathématiques, aujourd'hui on « bricole » les anciennes comme dans la relativité d'Albert Einstein (1879-1955) où l'addition des vitesses, par exemple, n'a plus le même algorithme de résolution. Dans la mathématique newtonienne, on s'accorde facilement de l'infini, on peut toujours ajouter une quantité à une somme quelle que soit sa hauteur, il n'y a pas de sommet plus haut que tous les autres, et ont les atteint tous à la même vitesse. Dans celle d'Einstein plus on s'approche du sommet, moins on va vite, comme si l'on s'essoufflait, mais quoi que l'on ajoute, on n'atteint jamais le sommet même s'il apparaît de plus en plus près, de plus en plus à notre portée. Dans la physique einsteinienne, il existe des limites qui sont indépassables et même inatteignables. À l'opposé, dans le domaine de l'infiniment petit, il existe aussi des limites de petitesse et si, en mathématique newtonienne, on peut toujours diviser une quantité par deux pour n'en considérer que la moitié, la physique quantique ne pourrait s'accommoder de cette opération, car en dessous d'un quanta il n'y a pas de demi-quanta. Là encore il faudra probablement une mathématique quantique pour garder la cohérence entre l'outil mathématique et l'objet sur lequel elle s'applique sans avoir à bricoler ses fondements. Un jour nos bricolages montreront leurs limites.

Tiens… Je viens de dire que les mathématiques sont un outil. N'est-ce qu'un outil ? Ou plus précisément *des* outils ? Mais qu'est donc exactement cette mathématique, et que contient sa boîte à outils ?

On peut certainement considérer les mathématiques effectivement comme une boîte à outils contenant des instruments spécialisés, dont certains plus généraux et destinés à la résolution de toutes sortes de problèmes plutôt simples, et d'autres plus sophistiqués mais plus orientés vers certains types de problèmes particuliers. Certains autres encore sont des machines-outils destinées à être utilisées avec n'importe quel outil spécialisé.

Aussi bien dans l'histoire de l'évolution de l'homme que dans le sens croissant de la complexité, tout à fait en bas, on trouve le calcul, avec les quatre opérations de bases, qui apparaît avec l'arithmétique élémentaire. Le calcul est certainement le premier outil des mathématiques, car il est l'inventeur des premiers algorithmes généraux utiles à tous les domaines avec ses quatre algorithmes de base. Les variables y prennent l'apparence abstraite des nombres, mais les raisonnements restent concrets, proches de la physique du problème à résoudre. Puis l'arithmétique se muscle avec des algorithmes d'opérations plus complexes, comme l'exponentiation et l'extraction de racine qui permettent d'aborder des problèmes plus subtils.

Simultanément, ou seulement un peu après, apparaît la géométrie qui permet la représentation concrète des quantités bien abstraites que sont les nombres. Son développement permettra même dans certains cas de résoudre des problèmes directement, sans passer par les nombres. Cette géométrie des figures donnera même naissance à une fille très performante, la trigonométrie lorsque l'on s'apercevra qu'une des figures particulières de la géométrie, le triangle, jouit de propriétés remarquables.

Du dessin sur la feuille de papier plat cette géométrie prendra une dimension supplémentaire et deviendra spatiale, les droites deviendront des courbes et leurs formes inspireront des relations entre les courbes elles-mêmes et ce qu'elles recouvrent. Apparaîtront alors les calculs infinitésimal, intégral et différentiel. Les « clients » du calcul se montrent de plus en plus exigeants, demandent des développements à leur seul profit. Des besoins de calculs sur des piles, des rangées, et des colonnes de nombres feront naître le calcul matriciel. Le nouveau cadre de la physique fixé par la Relativité générale d'Einstein imposera le calcul tensoriel comme une extension du calcul vectoriel libéré des contraintes de coordonnées dans un référentiel. Mais nous sommes déjà loin des besoins du quotidien, de celui de l'arithmétique élémentaire qui connaîtra une autre sorte de croissance. Revenons à une arithmétique bien plus terre-à-terre et en phase avec le quotidien et ses problèmes pratiques.

Il semblera si ennuyeux de devoir développer un raisonnement d'arithmétique pour chaque problème à résoudre que les hommes chercheront le moyen de schématiser les problèmes voisins ou différents afin de les résoudre ensuite par des procédés mécaniques en appliquant les mêmes algorithmes universels, quel que soit le problème à résoudre. Ils inventent alors l'algèbre. Ce procédé merveilleux consiste à mettre le problème en équation, c'est-à-dire mettre d'un côté ce que l'on sait et de l'autre ce que l'on cherche. Et entre les deux ils inventent un symbole extraordinaire, le signe égal.

Ensuite tout est permis, on peut prendre n'importe quoi des quelques choses à droite pour les mettre à gauche, et l'inverse également bien sûr, mais à une condition impérative, garder toujours vraie la signification du symbole égal qui sépare ces deux suites de quelques choses. L'imagination sera au pouvoir, on apprendra même à ajouter d'un côté des choses qui semblent ne rien à voir à faire avec notre problème et mettre la même chose sous une forme éventuellement très différente de l'autre côté, et cela uniquement si ça nous arrange, du moment que cela ne change pas l'égalité. Alors nous serons vraiment dans l'abstraction, il n'y a même plus besoin de savoir ce qu'est notre problème, cela n'a plus aucune importance.

De manipulations en changement de côté, de regroupements en répartitions, notre équation évoluera pour faire jaillir la grandeur inconnue, objet de la recherche avec cette alchimie abstraite. Comme l'arithmétique, l'algèbre évoluera au cours des siècles, et le Français François Viet y apportera une sophistication remarquable qui nous affranchira des chiffres. Il inventera les littéraux (des lettres de l'alphabet) qui permettent de ne pas avoir un problème réel à traiter pour utiliser l'algèbre. Il permettra de faire des modèles passe-partout à utiliser tels quels. Il suffira de remplacer les lettres du modèle par les nombres correspondants du vrai problème pour mécaniquement obtenir la solution.

La boîte à outil mathématique dispose de bien d'autres outils spécialisés dont nous ne parlerons pas tant leur utilité est éloignée des problèmes du quotidien et restreinte à des professions spécifiques, bien au-delà de l'érudition que l'on peut attendre d'un honnête citoyen du XXIe siècle. Mais un jour ou l'autre peut-être entendrez-vous parler de calculs vectoriels, tensoriels, matriciels, etc. Ne vous laissez pas abuser, il s'agit d'hyperspécialisation.

Notre boîte à outils restera celle d'un amateur, mais d'un amateur cultivé du XXIe siècle.