

Table des matières

Avant-propos	1
Chapitre 1. Les espaces vectoriels avec produit scalaire (ou pré-hilbertiens)	3
1.1. Le produit scalaire réel et complexe	3
1.2. La norme associée à un produit scalaire (hilbertienne) et les espaces vectoriels normés	9
1.2.1. La formule du parallélogramme et de polarisation	12
1.3. Familles orthogonales et orthonormales dans des espaces vectoriels avec produit scalaire	14
1.4. Le théorème de Pythagore généralisé	14
1.5. Orthogonalité et indépendance linéaire	16
1.6. La projection orthogonale dans les espaces vectoriels avec produit scalaire	18
1.7. Existence d'une base orthonormale : l'algorithme itératif de Gram-Schmidt	22
1.8. Les propriétés fondamentales d'une base orthonormale et orthogonale	24
1.9. En résumé	32
Chapitre 2. La transformée de Fourier discrète et ses applications à la théorie des signaux et des images	35
2.1. L'espace $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$ et sa base canonique	35
2.1.1. La base orthogonale des exponentiels complexes de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	38
2.2. La base orthonormale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	43
2.3. La base orthogonale de Fourier de $\ell^2(\mathbb{Z}_N)$	44
2.4. Les coefficients de Fourier et la transformée de Fourier discrète (DFT)	46
2.4.1. La transformée de Fourier inverse (IDFT)	48

2.4.2. Définition de la DFT et de l'IDFT avec la base orthonormale de Fourier	51
2.4.3. La base (orthonormale) de Fourier réelle	52
2.5. Interprétation matricielle de la DFT et de l'IDFT	53
2.5.1. <i>Fast Fourier Transform</i> (FFT)	56
2.6. La transformée de Fourier dans le traitement des signaux	57
2.6.1. La formule de synthèse des signaux 1D : décomposition sur la base des harmoniques	57
2.6.2. Signification des coefficients de Fourier et spectres d'un signal 1D	58
2.6.3. La formule de synthèse et les coefficients de Fourier de l'impulsion unitaire δ	60
2.6.4. Hautes et basses fréquences m dans la formule de synthèse	61
2.6.5. Filtrage de signaux dans la représentation fréquentielle	65
2.6.6. L'opérateur de multiplication et sa représentation matricielle diagonale	66
2.6.7. Le multiplicateur de Fourier	67
2.7. Propriétés de la DFT	68
2.7.1. La périodicité de \hat{z} et \check{z}	68
2.7.2. DFT et translation	69
2.7.2.1. Invariance du spectre par translation	71
2.7.3. DFT et conjugaison	73
2.7.4. DFT et convolution	75
2.8. La DFT et les opérateurs stationnaires	80
2.8.1. La DFT et la diagonalisation des opérateurs stationnaires	81
2.8.2. Matrices circulantes	84
2.8.3. La caractérisation exhaustive des opérateurs stationnaires	85
2.8.4. Filtres passe-haut, passe-bas, passe-bande	90
2.8.5. La caractérisation des opérateurs stationnaires <i>via</i> les opérateurs de translation	91
2.8.6. Analyse fréquentielle des opérateurs de dérivation (discrète) première et seconde	92
2.9. La transformée de Fourier bidimensionnelle (DFT 2D)	96
2.9.1. Représentation matricielle de la DFT 2D : produit de Kronecker <i>versus</i> itération de deux DFT 1D	99
2.9.2. Les propriétés de la DFT 2D	102
2.9.3. La DFT 2D et les opérateurs stationnaires	104
2.9.4. Les opérateurs gradient et laplacien et leur action sur les images numériques	105
2.9.5. Visualisation du spectre d'amplitude en 2D	107
2.9.6. Un exemple remarquable de filtrage d'une image numérique dans l'espace de Fourier : le floutage	109
2.10. En résumé	111

Chapitre 3. Rappel sur la théorie de la mesure et de l'intégration à la Lebesgue	113
3.1. Riemann <i>versus</i> Lebesgue	113
3.2. Tribu (σ -algèbre), espace mesurable, mesure et espace mesuré	114
3.3. Fonctions mesurables et propriétés possédées presque partout (p.p)	116
3.4. Fonctions intégrables, intégrales à la Lebesgue	117
3.5. La caractérisation de la mesure de Lebesgue sur \mathbb{R} et les ensembles de mesure de Lebesgue nulle	119
3.6. Les trois théorèmes d'opération de limite dans la théorie de l'intégration	121
3.7. En résumé	123
Chapitre 4. Espaces de Banach et de Hilbert	125
4.1. La topologie métrique des espaces vectoriels avec produit scalaire	126
4.2. La continuité des opérations fondamentales des espaces vectoriels avec produit scalaire	131
4.2.1. L'équivalence des topologies séparées des espaces vectoriels de dimension finie	138
4.3. Suites de Cauchy et complétude : espaces de Banach et de Hilbert	140
4.3.1. La complétude des espaces vectoriels	144
4.3.2. Une caractérisation de la complétude d'espaces vectoriels normés <i>via</i> séries	146
4.3.2.1. L'exponentiel matriciel	149
4.3.3. Le théorème de point fixe de Banach	150
4.4. Exemples remarquables d'espaces de Banach et de Hilbert	156
4.4.1. Les espaces L^p et ℓ^p et leur complétude	156
4.4.2. Les espaces L^∞ et ℓ^∞ et leur complétude	167
4.4.3. Relations d'inclusion parmi les espaces ℓ^p	173
4.4.4. Relations d'inclusion dans les espaces L^p	175
4.4.5. Théorèmes de densité dans $L^p(X, \mathcal{A}, \mu)$	177
4.4.5.1. Fonctions étagées	177
4.4.5.2. Intersections $L^p \cap L^q$ et $\ell^p \cap \ell^q$	177
4.4.5.3. Fonctions test	178
4.4.5.4. L'espace de Schwartz	179
4.5. En résumé	181
Chapitre 5. La structure géométrique des espaces de Hilbert	183
5.1. Le complément orthogonal dans un espace de Hilbert et ses propriétés	183
5.2. Le théorème de projection sur un convexe fermé et ses conséquences	186

- 5.2.1. Une caractérisation des sous-espaces vectoriels fermés dans les espaces de Hilbert 193
- 5.3. Sous-ensembles polaire et bipolaire d'un espace de Hilbert 195
- 5.4. Le théorème de la projection (orthogonale) dans un espace de Hilbert 198
- 5.5. Systèmes orthonormés et bases hilbertiennes 200
 - 5.5.1. L'inégalité de Bessel et les coefficients de Fourier 202
 - 5.5.2. Le théorème de Fisher-Riesz 204
 - 5.5.3. Les caractérisations d'une base hilbertienne 207
 - 5.5.4. Isomorphismes entre espaces de Hilbert 212
 - 5.5.5. $\ell^2(\mathbb{N}, \mathbb{K})$ comme prototype des espaces de Hilbert séparables de dimension infinie 214
- 5.6. La base hilbertienne de Fourier en L^2 214
 - 5.6.1. $L^2[-\pi, \pi]$ ou $L^2[0, 2\pi]$ 214
 - 5.6.2. $L^2(\mathbb{T})$ 216
 - 5.6.3. $L^2[a, b]$ 218
 - 5.6.4. Série de Fourier réelle 219
 - 5.6.5. Convergence ponctuelle de la série de Fourier réelle : le théorème de Dirichlet 225
 - 5.6.6. Le phénomène de Gibbs et les sommes de Cesàro 226
 - 5.6.7. La vitesse de convergence à 0 des coefficients de Fourier 228
 - 5.6.8. Transformée de Fourier en $L^2(\mathbb{T})$ et translation 231
- 5.7. En résumé 232

Chapitre 6. Les opérateurs linéaires bornés dans les espaces de Hilbert 235

- 6.1. Les propriétés fondamentales des opérateurs linéaires bornés entre espaces vectoriels normés 237
 - 6.1.1. La continuité des opérateurs linéaires définis sur un espace vectoriel normé de dimension finie 240
- 6.2. La norme opératorielle, la convergence des suites d'opérateurs et les algèbres de Banach 241
 - 6.2.1. Un exemple (classique) d'opérateur linéaire non borné sur un espace vectoriel de dimension infinie 252
- 6.3. Inversibilité des opérateurs linéaires 253
- 6.4. L'espace dual d'un espace de Hilbert et le théorème de représentation de Riesz 258
 - 6.4.1. Le produit scalaire induit sur le dual d'un espace de Hilbert 263
- 6.5. Formes bilinéaires, sesquilinéaires et formes quadratiques associées 264
 - 6.5.1. Le théorème de Lax-Milgram et ses conséquences 272
- 6.6. L'opérateur adjoint et ses propriétés 275
- 6.7. Les opérateurs de projection orthogonale dans un espace de Hilbert 284
 - 6.7.1. Les opérateurs de multiplication bornés et leur relation avec les projecteurs orthogonaux 293

6.7.2. La réalisation géométrique des opérateurs de projection orthogonale <i>via</i> systèmes orthonormés	296
6.8. Les opérateurs isométriques et unitaires	302
6.8.1. Les caractérisations des opérateurs isométriques et unitaires	304
6.8.2. Relation entre opérateurs isométriques et unitaires et systèmes orthonormés	309
6.9. La transformée de Fourier sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$, $L^1(\mathbb{R}^n)$ et $L^2(\mathbb{R}^n)$	311
6.9.1. Un espace invariant par la transformée de Fourier : l'espace de Schwarz	312
6.9.2. Extension de la transformée de Fourier de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$ à $L^1(\mathbb{R}^n)$: le théorème de Riemann-Lebesgue	317
6.9.3. Extension de la transformée de Fourier à un opérateur unitaire sur $L^2(\mathbb{R}^n)$: la transformée de Fourier-Plancherel	318
6.9.4. Relation entre transformée de Fourier-Plancherel et base hilbertienne de Hermite	321
6.9.5. La transformée de Fourier et la convolution	322
6.9.6. Convolution et transformée de Fourier en L^2 : le problème de la localisation de la transformée de Fourier	326
6.10. Le théorème d'échantillonnage de Shannon, Nyquist et Whittaker	327
6.10.1. La fréquence de Nyquist : <i>aliasing</i> et <i>oversampling</i>	329
6.11. Application de la transformée de Fourier à la résolution d'équations différentielles en dérivées ordinaires et partielles	330
6.11.1. Un exemple d'équation différentielle ordinaire résolue avec la transformée de Fourier	330
6.11.2. Transformée de Fourier et équation différentielle en dérivée partielle	332
6.11.3. Résolution de l'équation différentielle en dérivée partielle de la propagation de la chaleur avec la transformée de Fourier	333
6.12. En résumé	336
Annexe 1. L'espace vectoriel quotient	339
Annexe 2. L'opérateur transposé (ou dual) d'un opérateur linéaire	345
Annexe 3. La convergence uniforme, forte et faible	347
Bibliographie	351
Index	353