Avant-propos

Le but de cet ouvrage est d'introduire les concepts les plus importants de la théorie des espaces de Hilbert et des opérateurs définis sur ces espaces.

La raison pour laquelle on dédie un ouvrage entier aux espaces de Hilbert est simple à comprendre : parmi les espaces vectoriels de dimension infinie, les espaces de Hilbert constituent l'objet mathématique le plus proche des espaces euclidiens de dimension finie, c'est-à-dire $\mathbb{R}^n$ ou $\mathbb{C}^n$, où on développe l'analyse et l'algèbre linéaire classiques.

Lorsque l'on passe en dimension infinie, des subtilités de nature topologique imposent de rajouter des conditions (qui en dimension finie sont toujours vérifiées) pour pouvoir assurer la validité des résultats que l'on connaît dans les espaces euclidiens. Pour les espaces de Hilbert, une de ces conditions topologiques est la complétude, c'est-à-dire le fait que toute suite de Cauchy soit convergente dans l'espace où elle est définie.

Cette considération montre que la théorie des espaces de Hilbert peut être pensée comme un mélange très élégant d'algèbre, analyse et topologie : ceci est l'héritage de grands mathématiciens du début du XX$^{\text{e}}$ siècle, entre autres Riesz, Banach et, évidemment, Hilbert, qui ont mis en lumière l'exigence de ce mélange pour étendre les résultats classiques de l'algèbre et de l'analyse à la dimension infinie.

Une transformation linéaire particulièrement importante sera le fil rouge de cet ouvrage : la transformée de Fourier. On examinera d'abord ses propriétés en dimension finie, avec ce que l'on appelle la transformée de Fourier discrète, et on passera après à l'extension en dimension infinie, en considérant différents domaines pour cette transformation.

Bien assimiler les concepts introduits dans cet ouvrage est essentiel pour l'évolution de la carrière d'un mathématicien dans toute direction, soit-elle théorique ou appliquée, et permet de faire connaissance avec des techniques et des outils mathématiques développés dans une période particulièrement fertile et créative de l'histoire de la science. Ces techniques et ces outils restent toujours actuelles dans la recherche mathématique pure et appliquée.

Je voudrais remercier Olivier Husson pour m'avoir aidé à réaliser une grande partie des figures de cet ouvrage.