

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
<b>Chapitre 1. Géométrie symplectique</b> . . . . .	9
1.1. Espaces vectoriels symplectiques . . . . .	9
1.2. Variétés symplectiques . . . . .	10
1.3. Champs de vecteurs et flots . . . . .	20
1.4. Dérivée de Lie, produit intérieur et formule d'homotopie de Cartan . . . . .	31
1.5. Lemme de Moser et théorème de Darboux-Weinstein . . . . .	42
1.6. Crochets de Poisson, champ de vecteurs hamiltonien et théorème de Noether . . . . .	47
1.7. Exemples . . . . .	56
1.8. Orbites co-adjointes d'un groupe de Lie et leurs structures symplectiques . . . . .	65
<b>Chapitre 2. Calcul des variations</b> . . . . .	87
2.1. Équation d'Euler-Lagrange . . . . .	87
2.2. Géodésiques, brachistochrone et problème isopérimétrique . . . . .	90
2.2.1. Géodésiques dans le plan et sur une surface . . . . .	90
2.2.2. Problème brachistochrone . . . . .	91
2.2.3. Problème isopérimétrique . . . . .	93
2.3. Transformation de Legendre . . . . .	95
2.4. Équations canoniques de Hamilton . . . . .	98
2.5. Transformation canonique . . . . .	100
2.6. Équation de Hamilton-Jacobi . . . . .	101
2.7. Exemples : oscillateur harmonique et problème de Kepler . . . . .	109

<b>Chapitre 3. Dynamique hamiltonienne</b> . . . . .	<b>115</b>
3.1. Théorème d'Arnold-Liouville . . . . .	115
3.2. Systèmes hamiltoniens intégrables . . . . .	123
3.3. Quelques théorèmes fondamentaux . . . . .	125
3.3.1. Équation de Lax . . . . .	125
3.3.2. Théorème d'Adler-Kostant-Symes . . . . .	127
3.3.3. Théorèmes d'Adler-van Moerbeke-Mumford . . . . .	129
3.3.4. Exemples . . . . .	132
3.3.5. Méthode de linéarisation de Griffiths . . . . .	135
3.4. Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe . . . . .	145
3.4.1. Le corps solide d'Euler . . . . .	148
3.4.2. La toupie de Lagrange . . . . .	155
3.4.3. La toupie de Kowalewski . . . . .	157
3.4.4. Cas particuliers spéciaux . . . . .	167
3.5. Mouvement d'un solide dans un fluide parfait . . . . .	169
3.5.1. Cas de Clebsch . . . . .	169
3.5.2. Cas de Lyapunov-Steklov . . . . .	172
3.6. Flot géodésique sur le groupe $SO(4)$ . . . . .	172
3.7. Une famille de systèmes intégrables . . . . .	182
3.7.1. Potentiel quartique, système de Garnier . . . . .	182
3.7.2. Équations couplées non linéaires de Schrödinger . . . . .	185
3.7.3. Champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$ . . . . .	186
3.8. Réseau de Toda . . . . .	188
3.9. Problèmes divers . . . . .	193
3.9.1. Le système différentiel de Hénon-Heiles . . . . .	193
3.9.2. Les systèmes de Toda périodiques généralisés . . . . .	194
3.9.3. Le réseau périodique de Kac-van Moerbeke . . . . .	195
3.9.4. Le système de Gross-Neveu . . . . .	195
3.9.5. Le potentiel de Kolossov . . . . .	196
3.9.6. Le potentiel de Ramani-Dorizzi-Grammaticos . . . . .	197
3.9.7. Les équations de Nahm . . . . .	197
<b>Chapitre 4. Hiérarchie KP-KdV et opérateurs pseudo-différentiels</b> . . . . .	<b>201</b>
4.1. Introduction . . . . .	201
4.2. Équation stationnaire de Schrödinger et équation intégrale de Gelfand-Levitan . . . . .	204
4.3. Méthode de la diffusion inverse . . . . .	218
4.4. Opérateurs pseudo-différentiels et structures symplectiques . . . . .	239
4.5. Équation de KdV, algèbres de Heisenberg et de Virasoro . . . . .	246

---

4.6. Hiérarchie KP, fonctions $\tau(t)$ , identités de Fay, opérateur vertex et équations bilinéaires de Hirota . . . . .	251
<b>Annexe. Compléments divers</b> . . . . .	<b>265</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>321</b>
<b>Index</b> . . . . .	<b>333</b>