

Table des matières

Avant-propos	1
Chapitre 1. Géométrie symplectique	9
1.1. Espaces vectoriels symplectiques	9
1.2. Variétés symplectiques	10
1.3. Champs de vecteurs et flots	20
1.4. Dérivée de Lie, produit intérieur et formule d'homotopie de Cartan . . .	31
1.5. Lemme de Moser et théorème de Darboux-Weinstein	42
1.6. Crochets de Poisson, champ de vecteurs hamiltonien et théorème de Noether	47
1.7. Exemples	56
1.8. Orbites co-adjointes d'un groupe de Lie et leurs structures symplectiques	65
Chapitre 2. Calcul des variations	87
2.1. Équation d'Euler-Lagrange	87
2.2. Géodésiques, brachistochrone et problème isopérimétrique	90
2.2.1. Géodésiques dans le plan et sur une surface	90
2.2.2. Problème brachistochrone	91
2.2.3. Problème isopérimétrique	93
2.3. Transformation de Legendre	95
2.4. Équations canoniques de Hamilton	98
2.5. Transformation canonique	100
2.6. Équation de Hamilton-Jacobi	101
2.7. Exemples : oscillateur harmonique et problème de Kepler	109

Chapitre 3. Dynamique hamiltonienne	115
3.1. Théorème d'Arnold-Liouville	115
3.2. Systèmes hamiltoniens intégrables	123
3.3. Quelques théorèmes fondamentaux	125
3.3.1. Équation de Lax	125
3.3.2. Théorème d'Adler-Kostant-Symes	127
3.3.3. Théorèmes d'Adler-van Moerbeke-Mumford	129
3.3.4. Exemples	132
3.3.5. Méthode de linéarisation de Griffiths	135
3.4. Rotation d'un corps solide autour d'un point fixe	145
3.4.1. Le corps solide d'Euler	148
3.4.2. La toupie de Lagrange	155
3.4.3. La toupie de Kowalewski	157
3.4.4. Cas particuliers spéciaux	167
3.5. Mouvement d'un solide dans un fluide parfait	169
3.5.1. Cas de Clebsch	169
3.5.2. Cas de Lyapunov-Steklov	172
3.6. Flot géodésique sur le groupe $SO(4)$	172
3.7. Une famille de systèmes intégrables	182
3.7.1. Potentiel quartique, système de Garnier	182
3.7.2. Équations couplées non linéaires de Schrödinger	185
3.7.3. Champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$	186
3.8. Réseau de Toda	188
3.9. Problèmes divers	193
3.9.1. Le système différentiel de Hénon-Heiles	193
3.9.2. Les systèmes de Toda périodiques généralisés	194
3.9.3. Le réseau périodique de Kac-van Moerbeke	195
3.9.4. Le système de Gross-Neveu	195
3.9.5. Le potentiel de Kolossov	196
3.9.6. Le potentiel de Ramani-Dorizzi-Grammaticos	197
3.9.7. Les équations de Nahm	197
Chapitre 4. Hiérarchie KP-KdV et opérateurs pseudo-différentiels	201
4.1. Introduction	201
4.2. Équation stationnaire de Schrödinger et équation intégrale de Gelfand-Levitan	204
4.3. Méthode de la diffusion inverse	218
4.4. Opérateurs pseudo-différentiels et structures symplectiques	239
4.5. Équation de KdV, algèbres de Heisenberg et de Virasoro	246

4.6. Hiérarchie KP, fonctions $\tau(t)$, identités de Fay, opérateur vertex et équations bilinéaires de Hirota	251
Annexe. Compléments divers	265
Bibliographie	321
Index	333