Avant-propos

La théorie des systèmes dynamiques intégrables utilise actuellement un arsenal très riche d'idées et de méthodes issues de diverses spécialités mathématiques (géométrie symplectique, géométrie différentielle, groupes et algèbres de Lie, calcul des variations, théories spectrale, géométrie complexe, etc.) et représente un des domaines les plus actifs des mathématiques modernes. L'intérêt et la difficulté concernant ce domaine sont dus, entre autres, au fait que les équations différentielles décrivant la nature sont presque toutes non linéaires. La solution de ces problèmes non linéaires par quadratures est généralement impossible et une solution numérique ne montre pas leurs propriétés qualitatives. Cependant, jusqu'à récemment, mathématiciens et physiciens durent se contenter, soit d'approximations linéaires, soit de théorèmes d'existence de solutions. La découverte ces dernières années de classes importantes de systèmes intégrables montra combien de phénomènes importants furent manqués lors de l'étude de ces équations par des méthodes linéaires. En fait, depuis longtemps, on avait utilisé dans tous les domaines les concepts de linéarisation et de superposition des modes. Les non linéarités n'étaient traitées que comme des petites perturbations. Elles sont dorénavant examinées dans leur intégralité. Les premières études furent motivées par des problèmes de physique des plasmas, par la dynamique des fluides ou des chaînes. L'exemple le plus célèbre est l'équation de Korteweg-de Vries (KdV) (Korteweg et de Vries 1895) qui décrit la propagation des ondes dans un canal infini peu profond :

$$\frac{\partial u}{\partial t} - 6u\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} = 0, \quad u(x,0) = u(x), \quad x \in \mathbb{R}$$

où $u(x,t)$ est l'amplitude de l'onde au point x et au temps t. Cette équation est caractérisée par un terme tendant à disperser l'onde et un autre terme non linéaire, tendant à concentrer l'onde. Un milieu dans lequel ces deux efforts se compensent sera propice à l'existence d'ondes solitaires ou solitons. Ce sont des ondes de formes définies progressant à des vitesses différentes et dont le profil est stable au cours de la propagation, par suite de cette compétition entre l'effet dispersif et l'effet non linéaire. En outre, ces ondes correspondent aux niveaux d'énergie de l'équation stationnaire de Schrödinger, ce qui a permis d'utiliser une analogie avec la mécanique quantique. La découverte de ce lien influença de nombreux domaines, des mathématiques à la technologie en passant par la physique et la biologie. Gardner, Greene, Kruskal et Miura (Gardner *et al.* 1967, 1974 ; Miura *et al.* 1968 ; Gardner 1971) ont montré que le spectre discret de l'opérateur :

$$L \equiv -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + u(x,t)$$

est invariant dans le temps lorsque le potentiel $u(x,t)$ évolue selon l'équation de KdV. De là, l'idée est venue que l'équation de KdV peut être considérée comme une déformation isospectrale de l'opérateur L (paire de Lax (Lax 1968)). Dès lors, le spectre discret (états liés) fournit des constantes du mouvement de l'équation de KdV. Faddev et Zakharov (1971) ont montré que que cette équation forme un champ de vecteurs hamiltonien pour une structure symplectique bien choisie et les états liés sont en involution vis-à-vis de cette structure symplectique. Finalement, l'équation de KdV peut être intégrée par la méthode spectrale inverse pour l'opérateur L. L'étape suivante était l'étude du problème périodique pour l'équation de KdV qui a permis à Dubrovin, Its, Krichever, Matveev, McKean, Novikov, Trubowitz et van Moerbeke (Its et Matveev 1975 ; Krichever 1976 ; McKean et Trubowitz 1976 ; Dubrovin *et al.* 1985 ; Vanhaecke 2001) et d'autres de découvrir une intéressante classe de systèmes complètement intégrables. La résolution de l'équation de KdV périodique en termes d'un mouvement uniforme rectiligne sur un tore complexe algébrique (jacobienne) naturellement associé à une courbe hyperelliptique, montre que non seulement l'équation de KdV est un flot rectiligne sur des tores réels mais aussi que ces tores peuvent s'étendre à des tores complexes de telle sorte que si le temps $t \in \mathbb{R}$ est remplacé par $t \in \mathbb{C}$, le système évolue également selon un mouvement uniforme et rectiligne sur ce tore complexe.

Entre-temps, le sujet a évolué vers des thèmes liés aux algèbres de Lie et à la géométrie, en vue de répondre aux problèmes fondamentaux concernant la nature des équations différentielles ordinaires et équations aux dérivées partielles complètement intégrables. En particulier, un nombre considérable de ces équations est entré dans le cadre de la mécanique hamiltonienne et possèdent plusieurs, voire même une infinité, de lois de conservation, en plus de la conservation de l'énergie et du moment. Ces lois résultent parfois de symétries apparentes au niveau de l'espace géométrique des configurations, parfois de symétries cachées au sein de l'espace des phases. On sait actuellement que ces symétries cachées, plus difficiles à saisir, se traduisent naturellement en termes de la théorie des groupes de Lie, qui systématise par excellence l'étude des symétries et qui établit le lien avec la théorie spectrale. À leur tour, ces groupes de Lie donnent lieu à des courbes algébriques ou surfaces de Riemann, d'où résultent des tores, ce qui nous conduit à des problèmes géométriques diverses. Ces tores jouent un rôle prépondérant car, les trajectoires des systèmes intégrables peuvent être considérées comme étant enroulées sur ces tores. La solution de ces problèmes de mécanique a donné lieu à un foisonnement d'idées et de liens entre les domaines apparemment les plus distants, comme la géométrie symplectique, la théorie spectrale, la géométrie algébrique et la théorie des groupes et algèbres de Lie. En retour, cette synthèse alimenta chacun de ces domaines en idées nouvelles. Quinconque a participé aux rencontres scientifiques de ces dernières années, où expérimentateurs, géomètres et algébristes se sont côtoyés, aura été frappé par l'énorme diversité de sujets. Actuellement, les applications de la théorie des systèmes complètement intégrables sont nombreuses, notamment en physique des particules, en dynamique des plasmas et des fluides, en mécanique statistique, en biologie de fibres, etc. Mais la théorie des solitons a également eu un impact sur les mathématiques pures ; par exemple, il fournit la réponse au fameux problème de Schottky, posé il y a un siècle, sur les relations entre les périodes provenant d'une surface de Riemann. *Grosso modo*, il s'agit de trouver des critères pour qu'une matrice des périodes appartenant au demi-espace de Siegel soit la matrice des périodes d'une surface de Riemann. Géométriquement, le problème de Schottky consiste à caractériser les jacobiennes parmi toutes les variétés abéliennes principalement polarisées. Signalons aussi la théorie des systèmes algébriquement complètement intégrables (qui faute de place ne sera pas présentée dans cette ouvrage, mais pour lequel on renvoie le lecteur intéressé aux travaux (Vanhaecke 2001 ; Mumford 1983 ; Adler *et al.* 2004 ; Lesfari 2011a, 2015a)), présente une stratégie de résolution d'une classe importante d'équations différentielles non linéaires. Cela veut dire que l'on demande que les invariants du système différentiel soient polynomiaux (dans des coordonnés adéquates) et que de plus les variétés complexes obtenues en égalant ces invariants polynomiaux à des constantes génériques forment la partie affine d'une variété Abélienne de telle façon que les flots complexes engendrés par les invariants du système soient des lignes droites sur ces tores complexes. Les méthodes utilisées sont avant tout analytiques, mais très inspirées par des méthodes de géométrie complexe contemporaine.

Au cours de ces dernières années, de nombreux problèmes se rattachant à la géométrie symplectique, la géométrie algébrique, la combinatoire, les probabilités et la théorie de jauge quantique, etc., ont été résolus explicitement par des méthodes inspirées des techniques issues de l'étude des systèmes intégrables. En particulier, l'étude des matrices aléatoires, domaine qui établit des liens avec plusieurs problèmes, par exemple avec la combinatoire, les probabilités, la théorie des nombres, les modèles de croissances et de pavages aléatoires et les questions de technologie de la communication. Les fonctions $\tau(t)$ jouent un rôle important dans plusieurs domaines, comme les systèmes intégrables, les théories de cordes, les théories de jauge quantique, les déformations isomonodromiques, les modèles matriciels (gravité quantique), les intégrales matricielles associées ont des développements en séries perturbatrices dont les termes comptent les triangulations sur des surfaces (graphes de Feynman), les problèmes de modules et dans bien d'autres domaines. Les fonctions $\tau(t)$ sont la source d'inspiration pour bon nombre de mathématiciens et physiciens en quête de nouvelles structures algébriques apparaissant en mathématique et en physique. Les W-algèbres sont à la croisée de nombreuses idées mathématiques et physiques ; elles portent (comme le disait notre professeur Pierre van Moerbeke) la marque de grandes mathématiques ! Pour en savoir plus, on consultera par exemple (van Moerbeke 1994, 1998) et les références qui s'y trouvent.

Cet ouvrage est destiné aux étudiants de licence et master de mathématiques, physique et au-delà. Il se subdivise en cinq grands chapitres. Le chapitre 1 est consacré à la géométrie symplectique. Le chapitre 2 concerne le calcul des variations. Le chapitre 3 est consacré à l'étude de la dynamique hamiltonienne. Dans le chapitre 4, on étudie la hiérarchie KP-KdV et les opérateurs pseudo-différentiels. L'annexe présente quelques notions sur divers thèmes à la fois pour leurs intérêts propres et parce que cela conduit, en cas de besoin, à clarifier un certain nombre de résultats obtenus dans cet ouvrage ; il est préférable de les passer en première lecture et de se borner à les consulter au moment de l'usage. De nombreux exemples se trouvent disséminés dans le texte.

Voyons maintenant avec un peu plus de détail le contenu de cet ouvrage avec éventuellement quelques motivations.

Dans le chapitre 1, on étudie les variétés symplectiques, ce qui nous permettra en particulier d'introduire les champs de vecteurs hamiltoniens. Actuellement, ces variétés ont conquiert un territoire riche, s'affirmant en tant que branche centrale de la géométrie et topologie différentielles. En plus de leur activité en tant que sujet indépendant, les variétés symplectiques sont fortement stimulées par des interactions importantes avec de nombreuses spécialités mathématiques et physiques, entre autres. Il est bien connu que les variétés symplectiques jouent un rôle crucial en mécanique classique, en optique géométrique, en thermodynamique, pour ne citer que ces quelques exemples frappants. On étudie d'abord les espaces vectoriels symplectiques. Ensuite, le chapitre sera consacré à l'étude de la dérivée de Lie, le produit intérieur ainsi que l'importante formule d'homotopie de Cartan. Une partie sera consacrée à l'étude d'un théorème central de la géométrie symplectique à savoir le théorème de Darboux : les variétés symplectiques (M, ω) de dimension $2m$ sont localement isomorphes à $(\mathbb{R}^{2m}, \omega)$. Plus précisément, si (M, ω) est une variété symplectique de dimension $2m$, alors au voisinage de chaque point de M, il existe des coordonnées locales $(x_1, ..., x_{2m})$ telles que : $\omega = \sum_{k=1}^{m} dx_k \wedge dx_{m+k}$. La preuve classique donnée par Darboux du théorème qui porte son nom se fait par récurrence sur la dimension de la variété. Nous en donnerons un aperçu (Arnold 1989) et nous verrons une autre démonstration due à Weinstein (Weinstein 1971) se basant sur un résultat de Moser (Moser 1965). On introduit les crochets de Poisson sur les variétés symplectiques, le champ de vecteurs hamiltonien et on montre que la matrice associée à un système hamiltonien forme une structure symplectique. On étudie les champs de vecteurs définis sur une variété différentiable, leurs liaisons avec les groupes à un paramètre de difféomorphismes ou flots ainsi qu'avec les opérateurs différentiels. On montre qu'un champ de vecteurs différentiable et à support compact est générateur d'un unique groupe à un paramètre de difféomorphismes de cette variété ; on construit le flot sur toute la variété. Puis la notion de commutativité des champs de vecteurs est détaillée, avec des calculs explicites concernant une condition nécessaire et suffisante fort utile pour vérifier la commutativité des champs de vecteurs. D'autres résultats seront démontrés, notamment le théorème de Noether qui exprime l'existence d'une intégrale première associée à une symétrie du lagrangien. Le chapitre se termine par l'étude des orbites adjointes et co-adjointes d'un groupe de Lie avec une application dans le cas du groupe spécial orthogonal $SO(n)$. On y développe le calcul explicite des structures symplectiques sur une variété différentiable. Nous verrons comment définir une structure symplectique sur l'orbite de la représentation co-adjointe d'un groupe de Lie. Une attention particulière est donnée aux groupes $SO(3)$ et $SO(4)$.

On étudie dans le chapitre 2 quelques propriétés concernant le calcul des variations et on établira les équations différentielles d'Euler-Lagrange. Une attention particulière sera donnée à l'étude des géodésiques dans le plan et sur une surface, au problème brachistochrone lequel a donné naissance au calcul des variations et enfin au problème isopérimétrique qui consiste à déterminer la courbe de longueur donnée délimitant la plus grande surface. On introduit ensuite la transformation de Legendre qui permet d'associer à ces équations qui sont de second ordre, un système d'équations différentielles de premier ordre qui sont les équations canoniques de Hamilton. Lors de l'étude d'un système hamiltonien et afin de simplifier le système en question, on aura parfois besoin d'effectuer des transformations. Or une transformation quelconque ne transforme pas un système hamiltonien en un autre système hamiltonien, seules les transformations canoniques ont cet effet. De telles transformations seront étudiées. Ensuite, on introduit l'équation de Hamilton-Jacobi ; c'est une équation aux dérivées partielles non linéaire. Sa résolution nécessite la connaissance d'une transformation canonique, en général difficile à déterminer. On examine en détail quelques cas particuliers intéressants. En guise d'application, on étudie l'oscillateur harmonique ainsi que le problème de Kepler.

On aborde dans le chapitre 3 le théorème d'Arnold-Liouville (Arnold 1989). Les variétés de niveau communes des intégrales premières définies par les groupes à un paramètre de difféomorphismes d'un système dynamique, sont invariantes du flot. La solution d'un problème non linéaire se ramène actuellement, à l'étude de son flot et de ces variétés invariantes. Le théorème d'Arnold-Liouville joue un rôle crucial dans l'étude de ces problèmes. Il permet, entre autres, d'étudier la situation topologique suivante : si les variétés invariantes sont compactes et connexes, alors elles sont difféomorphes aux tores réels sur lesquels le flot de phase détermine un mouvement quasi-périodique. Les équations du problème sont intégrables par quadratures et le théorème en question montre un comportement très régulier des solutions. Le but ici est de donner une démonstration de ce théorème aussi directe que possible et d'étudier explicitement ses liens avec la théorie des systèmes hamiltoniens intégrables. La suite concerne la théorie des déformations isospectrales (paires de Lax) ou méthode de la courbe spectrale, c'est-à-dire laissant invariant le spectre d'opérateurs linéaires contenant une indéterminée rationnelle. C'est une méthode puissante (mais difficile) qui permet d'obtenir des résultats précis sur l'intégrabilité des systèmes hamiltoniens. Elle donne un moyen de déterminer les intégrales premières du système différentiel en question et aussi (d'après une méthode de van Moerbeke-Mumford (van Moerbeke et Mumford 1979)) résoudre le problème sur la variété jacobienne (ou une sous-variété de celle-ci) définie par les périodes d'une courbe spectrale $\mathcal{C}$. Celle-ci est une courbe algébrique complexe (surface de Riemann) et est donnée par le polynôme caractéristique d'une certaine matrice (dépendant d'un paramètre) liée au problème à étudier. Aussi, un lien avec la théorie des groupes et algèbres de Lie a été fait. Cette approche est basée sur le théorème d'Adler-Kostant-Symes (Adler 1979 ; Kostant 1979 ; Symes 1980) qui donne une construction de grandes familles de fonctions en involution basée sur des décompositions d'algèbres de Lie. Ce théorème fournit des systèmes intégrables comme déformations isospectrales sur des orbites co-adjointes dans des algèbres de Kac-Moody (extensions formelles de dimensions infinies d'algèbres de Lie semi-simples). Ces systèmes ont suffisamment d'intégrales premières en involution. Des résultats précis ont été obtenus pour une classe intéressante d'orbites, que ce soit dans le cas d'algèbres de Lie de dimension finie ou infinie. On aborde ensuite la méthode de Griffiths (Griffiths 1985), sur l'interprétation cohomologique du critère de linéarisation. Il a trouvé des conditions nécessaires et suffisantes (de nature cohomologique) sans référence aux algèbres de Kac-Moody, pour que le flot de la forme de Lax puisse être linéarisé sur la variété jacobienne $Jac\,(\mathcal{C})$. Sa méthode se base sur l'observation que l'espace tangent aux déformations se trouve toujours dans des espaces de cohomologie bien choisis. On applique ces méthodes à l'étude de nombreux systèmes dynamiques : flot géodésique sur un ellipsoïde, problème de Neumann régissant le mouvement d'un point sur la sphère, rotation d'un corps solide autour d'un point fixe (cas d'Euler, de Lagrange, de Kowalewski, de Hesse-Appel'rot, de Goryachev-Chaplygin et de Bobylev-Steklov), mouvement d'un solide dans un fluide parfait (cas de Clebsch et de Lyapunov-Steklov), flot géodésique sur le groupe $SO(4)$, potentiel quartique ou système de Garnier, équations couplées non linéaires de Schrödinger, champ de Yang-Mills avec groupe de jauge $SU(2)$, réseau de Toda, système de Hénon Heiles, systèmes de Toda périodiques généralisés, réseau périodique de Kac-van Moerbeke, système de Gross-Neveu, potentiel de Kolossof, potentiel de Ramani-Dorizzi-Grammaticos et équations de Nahm.

Le chapitre 4 sera consacré à l'étude des équations de Korteweg-de Vries (KdV) et de Kadomtsev-Petviashvili (KP) ainsi qu'aux opérateurs pseudo-différentiels. L'étude de l'équation de KdV est l'archétype d'un système intégrable et constitue l'une des équations les plus fondamentales des phénomènes solitons et un sujet de recherche mathématique très actif. On donne un aperçu motivé de ce sujet intéressant. On aborde la méthode de diffusion inverse basée sur les équations de Schrödinger et de Gelfand-Levitan, utilisées pour résoudre explicitement l'équation de KdV. On étudie ensuite quelques généralités sur l'algèbre des opérateurs différentiels d'ordre infini. Les algèbres de Virasoro, de Heisenberg, les équations d'évolution non linéaires telles que les équations de KdV, de Boussinesq ainsi que celle de KP jouent un rôle crucial dans cette étude. L'étude des hiérarchies KdV et KP, l'utilisation des fonctions tau liées aux variétés grassmanniennes de dimension infinie, des opérateurs de vertex ainsi que le formalisme bilinéaire de Hirota ont conduit à l'obtention de propriétés remarquables concernant ces algèbres, comme par exemple l'existence d'une famille infinie d'intégrales premières fonctionnellement indépendantes et en involution. Récemment, l'élaboration de méthodes puissantes et la découverte de leurs structures algébriques communes ont conduit à des développements importants concernant l'étude des problèmes non linéaires pour une vue d'ensemble). Les fonctions tau $\tau(t)$ sont des fonctions spécifiques du temps, construites à partir de sections d'un fibré déterminant sur une variété grassmannienne de dimension infinie. Ces fonctions « généralisent » les fonctions *thêta* de Riemann et ce sont des solutions de la hiérarchie KP, c'est-à-dire, solutions d'une suite infinie d'équations aux dérivées partielles non linéaires reliant une infinité de fonctions en une infinité de variables. Les fonctions $\tau(t)$ peuvent être des polynômes de Schur, relevant de la théorie des représentations des groupes ou des déterminants de Fredholm. La première fonction tau à été introduite par Sato, Miwa et Jimbo en relation avec la théorie de déformations isomonodromiques. Elle a été définie comme une fonction de corrélation de certains champs quantiques, associés aux pôles d'un système Fuchsien sur la sphère de Riemann. Ces fonctions donnent des informations sur la topologie des espaces de modules des surfaces de Riemann et sont étroitement liées à la théorie des représentations des algèbres de Virasoro et des W-algèbres.

L'annexe présente les variétés différentiables réelles, les variétés analytiques complexes, les formes différentielles, les surfaces de Riemann compactes, les fonctions et intégrales elliptiques ainsi que les variétés abéliennes complexes.

J'ai inclus une bibliographie comportant quelques ouvrages fondamentaux facilement accessibles et un index détaillé permettant au lecteur de localiser rapidement un élément traité dans l'ouvrage. Je remercie ISTE Editions d'avoir donné tous ses soins à l'édition du présent ouvrage. Je dédie ce livre à ma femme, à mes enfants et je les remercie pour leur soutien indéniable.