# Avant-propos

La série « Modélisation géométrique et applications » propose cinq livres de recherche sur la modélisation géométrique, dont trois en français. L'action de modéliser une géométrie est très ancienne. Pour prendre quelques jalons, les géomètres de l'Antiquité s'y adonnaient même si la forme était bien sûr très différente de ce que nous connaissons actuellement. Descartes, au milieu du XVII^e siècle, a travaillé sur le partitionnement du plan, et Voronoï en a fixé les concepts à la fin du XIX^e siècle.

Mais on peut considérer que la modélisation géométrique telle que nous l'entendons actuellement est liée à l'utilisation de l'ordinateur, en particulier depuis la banalisation de cet outil. Nous serions tentés de dater la reconnaissance scientifique de cette activité lors de la conférence « First Conference on Computer Aided Geometric Design » en mars 1974 à l'université d'Utah organisée par R. Barhnill et R. Riesenfeld, dont les actes peuvent être retrouvés dans le livre « Computer Aided Geometric Design, Academic Press 1974 » qui associe clairement la modélisation géométrique et l'ordinateur.

Depuis, de nombreux livres très détaillés et de qualité ont été rédigés, l'un des premiers étant sans doute le livre de D. Faux et M. Pratt : « Computational Geometry for Design and Manufacture, Ellis Horwood Publishers, 1979 ». Certains livres ont été réédités plusieurs fois, tenant compte ainsi des avancées des travaux de recherche. Dans ce contexte, proposer un nouveau livre général sur le sujet n'aurait pas apporté d'avancée scientifique significative.

Par ailleurs, il n'y a pas pour un objet ou une entité à modéliser un modèle géométrique mais des modèles géométriques, chaque modèle étant adapté aux traitements à réaliser. Par exemple, le modèle pour analyser finement la forme d'un objet est nécessairement différent des modèles pour effectuer des calculs de mécanique sur ce même objet. Nous avons donc choisi de nous focaliser sur des points précis de la recherche dans des domaines qui nous paraissent particulièrement importants. C'est ainsi que les auteurs des différents ouvrages, écrits par des spécialistes, vous proposent de faire le point sur l'avancement des recherches :

• **« Contraintes et modélisation géométrique »**, proposé par *Dominique Michelucci, Pascal Schreck et Pascal Mathis*, s'intéresse aux problèmes géométriques qu'il est possible d'aborder en décrivant les contraintes, géométriques ou plus complexes, qu'une solution doit vérifier plutôt que d'avoir à fournir directement la définition géométrique d'une telle solution.

• « **Modélisation géométrique de formes fractales pour la CAO** », proposé par *Christian Gentil, Dmitry Sokolov et Gilles Gouaty*, traite de la définition de formes fractales : ce formalisme permet de réutiliser les formes lisses des modélisations géométriques aujourd'hui classiques, et de définir des formes inexplorées jusqu'à présent.

• « **Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique** », proposé en deux volumes par *Houman Borouchaki et Paul-Louis George*, détaille les méthodologies avancées de construction de maillages et de modélisation géométrique pour la simulation numérique avec des applications en particulier en mécanique.

Il s'agit de livres présentant des travaux de recherche récents. Le lecteur pourra avantageusement trouver dans les livres généraux sur la modélisation géométrique évoqués précédemment les éléments qui pourraient lui manquer pour lire les ouvrages de cette série.

Bonne lecture.

Marc DANIEL

# Introduction

Les triangulations et plus précisément les maillages, avec le subtil *distinguo* qui différencie ces deux types d'entités, sont au cœur de nombreux problèmes, eux-mêmes relatifs à des disciplines scientifiques très variées. Une triangulation ou un maillage est une représentation discrète au moyen d'éléments géométriques simples (triangle, quadrilatère, tétraèdre, etc., polygone ou polyèdre quelconque) d'un domaine qui peut être un objet ou une région dont on souhaite avoir une description spatiale discrète. Les applications sont donc nombreuses et englobent les simulations numériques de toute sorte de problèmes physiques, mais pas seulement. En particulier, une représentation discrète d'un objet (volumique) ou d'une surface peut être simplement vue comme un problème de modélisation géométrique en tant que tel. Le point de vue adopté dans ce livre est double, comme son titre l'indique, on va s'intéresser tant à l'utilisation des maillages dans les simulations numériques (pensons en particulier aux méthodes d'éléments finis) avec, évidemment, les contraintes propres sous-jacentes à l'utilisation de ces maillages à des fins de modélisation (discrète) d'une géométrie.

La littérature sur les triangulations et sur les maillages peut être classée en deux catégories principales, l'une plus purement mathématique et géométrique, l'autre plus orientée vers les applications industrielles (simulations numériques) avec, bien sûr, mais pas toujours, des liens entre ces deux catégories.

Le premier point de vue est couvert par la communauté de géométrie algorithmique (*computational geometry*) qui étudie, entre autres sujets, les triangulations de Delaunay sous toutes leurs coutures, définitions, propriétés, algorithmes de construction, complexité de ces algorithmes, et qui aborde quelques applications de ces triangulations. Néanmoins, relativement récemment, les problèmes de génération de maillages sont aussi abordés, mais sous un angle plutôt théorique en se ramenant principalement à des situations permettant l'utilisation de la triangulation de Delaunay, pour laquelle des méthodes robustes de construction ainsi que des propriétés géométriques intéressantes sont connues depuis longtemps. Cette philosophie (quelque peu monothéiste) impose nécessairement des limites sur la nature des problèmes traités (traitables). Le premier livre de référence sur ces sujets est celui de Preparata et Shamos, [Preparata, Shamos-1985]. Viennent ensuite plusieurs ouvrages, parmi lesquels nous citerons ceux de Edelsbrunner, [Edelsbrunner-1987, Edelsbrunner-2001], celui de Yvinec et Boissonnat, [Boissonnat, Yvinec-1997], celui de Dey, [Dey-2007], liste se terminant en 2012 par le livre de Cheng, Dey et

Shewchuk, [Cheng *et al.* 2012]. À quelques exceptions près, l'orientation choisie dans ces références ne semble pas toujours guidée par les préoccupations des numériciens, des ingénieurs et du monde de la simulation numérique en général.

Précisément, c'est ce besoin de simulations numériques, en particulier (et historiquement) en mécanique du solide ou en mécanique des fluides, qui a suscité l'émergence d'une communauté de « mailleurs » dans le monde des numériciens et des ingénieurs. Sans crainte d'être contredit, nous indiquons que le tout premier livre sur le maillage vu sous cette optique est celui de Thompson, Warsi et Wastin, [Thompson *et al.* 1985]. Cet ouvrage traite essentiellement de maillages structurés ou *grilles*[1] tandis que le premier livre vraiment généraliste, traitant de tous les types de maillages, structurés ou non, est celui de George, [George-1991]. Au fil des années et avec l'évolution tant des machines, des méthodes que de la nature de plus en plus complexe des problèmes de maillages à considérer, sont apparus plusieurs autres ouvrages. Mentionnons les livres de George et Borouchaki, [George, Borouchaki-1998], qui revisite les méthodes de maillage basées sur des algorithmes à la Delaunay ; de Carey, [Carey-1997], qui donne une présentation très pédagogique des méthodes ; de Topping et co-auteurs, [Topping *et al.* 2004], cité par souci d'exhaustivité ; de Frey et George, [Frey, George-2008], datant de 2000 avec une seconde édition en 2008, qui reprend le point de vue généraliste en incorporant les techniques nouvellement apparues ; de Löhner, [Löhner-2008], avec une seconde édition en 2008, qui fourmille de détails novateurs ; jusqu'au récent livre de Lo, [Lo-2015], qui, entre autres, donne un éclairage différent sur certains problèmes. Dans ce contexte, on peut se demander ce qui motive l'écriture du présent livre, nous allons essayer de répondre à cette question (et tenter ainsi de susciter la curiosité du lecteur).

La première observation est que les rares livres sur le sujet sont soit déjà un peu anciens ou, sinon, plutôt classiques dans leur manière de traiter les approches et les méthodes concernant les très nombreuses questions liées aux maillages. La seconde remarque est que, bien évidemment, des questions nouvelles sont apparues relativement récemment, on peut penser ici, mais pas seulement, à tout ce qui concerne les éléments (finis) ou carreaux de degré élevé, les métriques et leurs liens avec les erreurs d'interpolation, la modélisation géométrique pour le maillage, la simulation numérique *via* des méthodes avancées (adaptation de maillages), etc. Cette remarque en appelle immédiatement une autre, nous allons résolument adopter un double point de vue en considérant les éléments finis (ou les éléments constitutifs d'un maillage) comme des carreaux géométriques et inversement, établissant ainsi un lien entre le monde de Lagrange des éléments finis et le monde de Bézier de la CAO. Ce parti pris, on le verra, change sensiblement la façon de percevoir les problèmes et, par suite, la façon d'essayer d'en trouver des solutions. Dans cet esprit, ce livre en deux volumes, au-delà d'un ensemble de sujets que l'on pourrait qualifier de classiques (et, de fait, incontournables) aborde de nombreux sujets très récents, voire totalement inédits. Par ailleurs, chose peut-être plus surprenante (et certainement rare), certaines méthodes (que l'on trouve dans la littérature) ont été délibérément délaissées, ayant été jugées sans grand intérêt et, *a contrario*, certaines méthodes sont décrites, mais avec un regard pour le moins nuancé

1. Les maillages de type grille sont générés en résolvant des équations aux dérivées partielles, par exemple, elliptiques. À noter, que succédant à cet ouvrage pionnier, on trouve d'autres livres plus récents sur le même thème, livres non mentionnés ici.

voire plutôt critique. Il nous a en effet semblé pertinent de donner notre perception, bien que jusqu'à un certain point subjective, sur ces méthodes, peut-être pour éviter au lecteur de se lancer dans des voies que nous pensons infructueuses. Cette précision étant faite, ce livre donne les bases nécessaires d'un cours en maillage et des problèmes liés en master et peut constituer une référence technique pour les étudiants ingénieurs en science et, plus généralement, les ingénieurs du monde de la simulation numérique. Nous allons, volume par volume, et en quelques mots, donner le contenu des différents chapitres.

⋄ Volume 1 :

Nous rappelons, en premier et chapitre par chapitre, le contenu du volume 1 de ce livre. Ce volume introduit, en trois chapitres, les notions de base relatives aux éléments finis vus au travers de leurs fonctions de forme, soit en tant qu'éléments finis soit en tant que carreaux. En plus de l'expression classique *via* des polynômes de Lagrange (complets, réduits ou rationnels), chapitre 1, on donne la formulation équivalente basée sur des formes de Bézier, chapitre 2, qui permet de trouver facilement les conditions de validité géométrique des ces éléments finis (ou carreaux), qu'ils soient droits ou courbes et quel que soit leur degré, chapitre 3. Les problèmes de triangulations font l'objet des trois chapitres suivants où l'on précise le vocabulaire et les notions de base permettant de décrire différentes méthodes de construction tant pour une triangulation quelconque, chapitre 4, la triangulation de Delaunay, chapitre 5, qu'une triangulation (d'un domaine) avec contraintes, chapitre 6. Dans les deux chapitres suivants, on utilise ce qui précède pour aborder le vaste problème de la modélisation géométrique d'un domaine dans ses diverses déclinaisons. La modélisation géométrique, dans notre optique (maillage et simulations numériques), consiste à construire une représentation discrète à partir d'une représentation continue ou l'inverse. Différentes méthodes sont décrites dans le premier de ces deux chapitres, chapitre 7, tandis que le second, chapitre 8, montre quelques exemples significatifs d'application des méthodes. Le dernier chapitre, chapitre 9, rassemble quelques algorithmes de base et formules liés aux éléments finis (carreaux) et aux triangulations pour persuader le lecteur, au-delà d'une vue théorique, d'aller jusqu'à un point de vue pratique, ce qui nous semble indispensable.

⋄ Volume 2 :

Nous donnons maintenant le contenu du volume 2 de ce livre, volume pour lequel se sont joints à nous quatre nouveaux auteurs. Ce volume aborde (enfin) les problèmes de maillages et débute par une description détaillée de la notion de métrique, notion qui se révélera fondamentale dans toute la suite. Les deux premiers chapitres, chapitres 1 et 2, concernent donc les métriques. On introduit la notion de métriques, on montre leurs propriétés et leurs liens avec la géométrie des éléments d'un maillage et avec le contrôle des erreurs d'interpolation lors de la résolution d'un problème (par éléments finis). Les méthodes de construction de maillages et de leur optimisation font l'objet de cinq chapitres, chapitres 3 (maillage d'une courbe), 4 (maillages simpliciaux), 5 (maillages non-simpliciaux), 6 (maillages de degré élevé) et 7 (optimisation de maillage). Ensuite, on peut traiter du large sujet concernant l'adaptation de maillages avec un contrôle des solutions *via* des estimateurs d'erreur et les métriques d'interpolation correspondantes, chapitre 8. L'utilisation d'une dose ou d'une certaine dose de parallélisme (selon ses multiples formes) est vue au travers du chapitre 9. Le chapitre 10 illustre, par des exemples concrets, une série d'applications des méthodes et méthodologies introduites et décrites au fil des différents chapitres des deux volumes de ce livre. Comme pour le volume 1, le dernier chapitre, chapitre 11, donne des indications pratiques sur quelques-uns des algorithmes propres au volume 2, en particulier sur la façon d'utiliser et de manipuler les métriques. Pour finir, à l'issue de ce deuxième volume, on esquisse quelques perspectives.

◇ Volume 3 :

À l'issue des deux premiers volumes, il nous est apparu comme une évidence de réaliser un troisième volume. Il reste en effet une quantité importante de points qui n'ont pas été abordés. Parmi ceux-ci, certains[2] peuvent être vus comme relatifs à des connaissances de base, par nécessairement inédites alors que d'autres s'inscrivent clairement dans la dynamique des précédents volumes avec une large part d'innovation. Le chapitre 1 se penche sur les structures de données en considérant trois niveaux, structures élémentaires, structures internes et structures externes. Le chapitre 2 décrit les transformations géométriques usuelles utilisées pour manipuler des (parties de) maillages et indique comment recoller (fusionner) rapidement deux maillages. Le chapitre 3 revient sur les méthodes de renumérotation des nœuds d'un maillage, par exemple pour minimiser la largeur de bande des matrices (de type éléments finis) construites sur un tel maillage. Les deux chapitres suivants, chapitres 4 et 5, abordent le vaste sujet de la visualisation des maillages et de solutions associées à ces maillages avec une attention particulière portée aux maillages et aux solutions de degré élevé. Les deux chapitres d'après, chapitres 6 et 7, montrent comment utiliser un maillage, calculer et assembler une matrice dans le cadre de l'utilisation d'une méthode d'éléments ou de volumes finis. Le chapitre 8, par le biais de quelques exemples choisis, propose au lecteur de réaliser lui-même quelques exercices. Dans ce cadre, des bribes de logiciels seront accessibles pour permettre au lecteur d'effectuer ces exercices. Le dernier chapitre, chapitre 9, comme pour les autres volumes, répertorie quelques formules et algorithmes.

*

* *

*Remerciements.*

Nous sommes particulièrement redevables à deux doctorants de l'époque qui ont, volontairement, comme on l'imagine, participé à l'élaboration de ce livre. Nicolas Barral nous a aidé *via* sa maîtrise de `Maple` pour résoudre les systèmes rencontrés lors de la construction des éléments de sérendipité. Loïc Frazza, Rémi Feuillet et Julien Vanharen nous ont aidé sur les éléments d'ordre élevé et les méthodes de volume fini. Victorien Menier est l'auteur de la plupart des figures qui illustrent le livre. Évidemment, l'ensemble des personnes de l'équipe de recherche Gamma3 de l'Inria[3] et de l'Utt[4], chercheurs, ingénieurs et doctorants, non directement présents dans la liste des auteurs, ont contribué, *via* leurs travaux, à l'élaboration ou la consolidation de divers sujets exposés dans ce livre, que ces personnes soient remerciées.

2. Bien que déjà décrits dans d'autres références, comme [Frey, George-2008], ils ont pu faire l'objet d'évolution et, de toute façon, il semble intéressant de les retrouver ici, réunis au reste du livre.

3. Insatitut national de recherche en informatique et en automatique.

4. Université de technologie de Troyes.