Introduction

Objectif. Ce livre est le troisième des six volumes d'un ouvrage dédié à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la physique :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Fonctions continues*
volume 3 : *Distributions*
volume 4 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev*
volume 5 : *Traces*
volume 6 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce troisième volume a pour objet de construire l'espace des distributions, à valeurs réelles ou vectorielles, et d'en donner les principales propriétés utiles pour l'étude des équations aux dérivées partielles.

Public visé. Nous[1] avons cherché des méthodes simples nécessitant le bagage minimal pour rendre cet outil accessible au plus grand nombre — doctorants, étudiants de troisième cycle, ingénieurs — sans en restreindre la généralité… et même en généralisant certains résultats, ce qui destine ce livre également aux chercheurs.

Ceci nous a conduit à une approche peu classique privilégiant les semi-normes et les propriétés séquentielles, que ce soit de complétude, de compacité ou de continuité.

1. **Nous ?** *Nous*, c'est moi ! N'y voie pas, lecteur, une ambition royale, mais le *nous de modestie* (?), qui est l'usage dans l'édition scientifique lorsqu'un auteur parle de lui-même [Bénédicte DELAUNAY et Nicolas LAURENT, *Bescherelle, La grammaire pour tous*, Hatier, 2013, p. 248]. *C'est par modestie que les écrivains de Port-Royal l'avaient mis à la mode, pour éviter, disaient-ils, la vanité du moi* [Louis-Nicolas BESCHERELLE, *Dictionnaire universel de la langue française*, 1845].

Utilité des distributions. L'intérêt essentiel des distributions est de permettre la dérivation de toutes les fonctions continues ou intégrables, même celles qui ne sont pas dérivables, et d'étendre ainsi le champ d'application du calcul différentiel. Ceci est particulièrement utile pour la résolution des équations aux dérivées partielles.

À cette fin, on définit une famille d'objets, les distributions, ayant les propriétés suivantes :
— Toute fonction continue est une distribution.
— Toute distribution a des dérivées partielles, qui sont des distributions.
— Pour une fonction dérivable, on retrouve les dérivées classiques.
— Toute limite de distributions est une distribution.
— Toute suite de Cauchy de distributions a une limite.

Ces propriétés peuvent être résumées grossièrement en disant que l'espace $\mathcal{D}'$ des distributions est le *complété pour la dérivation* de l'espace $\mathcal{C}$ des fonctions continues. Cette construction, due à Laurent SCHWARTZ [68] et [71], est développée ici pour les distributions sur un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$ à valeurs dans un espace de Neumann E, c'est-à-dire un espace vectoriel semi-normé séparé séquentiellement complet, et donc en particulier à valeurs dans un espace de Banach ou de Fréchet.

Originalité. La recherche de méthodes simples[2] donnant des propriétés générales nous a conduit à :
— Considérer directement des *valeurs vectorielles*, c'est-à-dire construire $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ sans étude préalable des distributions réelles.
— Supposer E *séquentiellement complet*, c'est-à-dire de Neumann.
— Utiliser des *semi-normes* pour construire les topologies, de E, $\mathcal{D}(\Omega)$, $\mathcal{D}'(\Omega; E)$...
— Munir $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de la *topologie simple*.
— Introduire la *pondération* pour généraliser la convolution aux domaines ouverts.
— Construire explicitement les *primitives*.
— *Séparer les variables* par une méthode «rustique».
— Ne faire appel à l'*intégration* que pour les *fonctions continues*.

Abordons ces points qui emmènent hors des sentiers battus.

Valeurs vectorielles. Nous considérons les distributions à valeurs dans un espace de Neumann général E bien que les équations aux dérivées partielles issues de la physique soient en général à valeurs réelles. Ceci sert dans les équations d'évolution pour séparer le temps t de la variable d'espace x. Une distribution en t, x à valeurs réelles

2. **Faire simple.** C'était l'un des mantras préférés de Steve JOBS : «Faire simple peut être plus difficile que faire compliqué. Il faut travailler dur pour mettre ses idées au clair et faire simple. Mais ça vaut le coup en fin de compte parce que, lorsque vous y parvenez, vous pouvez déplacer des montagnes» [*BusinessWeek*, 1998].

est alors identifiée à une distribution en t à valeurs dans un espace E de distributions en x, par exemple à un élément de $\mathcal{D}'(]0,T[;E)$ où $E = \mathcal{D}'(\Omega)$, espace qui est lui-même de Neumann. Cette identification est rendue loisible par le fondamental *théorème des noyaux*, p. 310.

Pour les équations stationnaires, les distributions à valeurs réelles (c'est-à-dire le cas $E = \mathbb{R}$) suffisent. Nous traitons directement le cas où E est un espace de Neumann pour éviter des répétitions, la généralisation consistant souvent à remplacer $\mathbb{R}$ par E et la valeur absolue $|\ \ |$ par une semi-norme de E dans les énoncés et les démonstrations, lorsque l'on utilise des méthodes adéquates.

Spécificité du cas vectoriel. Les principales différences avec les distributions à valeurs réelles sont que, en général :
— L'espace $\mathcal{D}'(\Omega;E)$ n'est pas réflexif et sa topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$ ne coïncide pas avec sa topologie faible.
— Les bornés de $\mathcal{D}'(\Omega;E)$ ne sont pas relativement compacts.
— Les distributions dans Ω ne sont pas d'ordre fini sur ses parties compactes ; elles ne peuvent pas toujours s'y exprimer comme dérivées d'ordre fini de fonctions continues.
— On peut séparer les variables en construisant une bijection de $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2;E)$ sur $\mathcal{D}'(\Omega_1;\mathcal{D}'(\Omega_2;E))$ (même pour une distribution réelle, c'est-à-dire pour $E = \mathbb{R}$, ceci fait intervenir des valeurs vectorielles, en l'occurrence dans $\mathcal{D}'(\Omega_2)$).

Complétude séquentielle. Nous supposons que E est un espace de Neumann, c'est-à-dire que toutes ses suites de Cauchy convergent, car c'est une condition essentielle pour que les fonctions continues soient des distributions, c'est-à-dire pour que $\mathcal{C}(\Omega;E) \subset \mathcal{D}'(\Omega;E)$, voir la section 3.4, *Le cas où E n'est pas de Neumann*, p. 53.

Cette propriété est plus simple que la complétude, c'est-à-dire que la convergence de tous les filtres de Cauchy, et, surtout, plus générale ; par exemple, si H est un espace de Hilbert de dimension infinie, H-faible est séquentiellement complet mais n'est pas complet [vol. 1, propriété (4.11), p. 82].

Elle est également plus simple et générale que la quasi-complétude, c'est-à-dire la complétude des parties bornées, utilisée par Laurent SCHWARTZ [71, p. 2, 50 et 52].

Semi-normes. Nous utilisons des familles de semi-normes plutôt que des topologies localement convexes, ce qui est équivalent, pour pouvoir définir $L^p(\Omega;E)$ au volume 4. En effet, on peut élever une semi-norme à une puissance p, pas un voisinage convexe !

Le maniement des espaces semi-normés est simple, bien que moins familier que celui des espaces topologiques : il suit celui des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs (semi-)normes et non plus sur une seule norme. Par exemple, nous engendrons la topologie de $\mathcal{D}(\Omega)$ par la famille de semi-normes $\|\varphi\|_{\mathcal{D}(\Omega);p} = \sup_{x\in\Omega,\ |\beta|\le p(x)} p(x)|\partial^\beta\varphi(x)|$ indexées par $p \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, ce qui est beaucoup plus simple que sa construction (équivalente) comme limite inductive des $\mathcal{D}_K(\Omega)$.

Topologie simple. Nous munissons $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ de la famille des semi-normes $\|f\|_{\mathcal{D}'(\Omega;E);\varphi,\nu} = \|\langle f, \varphi\rangle\|_{E;\nu}$ indexées par les $\varphi \in \mathcal{D}(\Omega)$ et les $\nu \in \mathcal{N}_E$ (ensemble indexant les semi-normes de E), c'est-à-dire de la topologie de la convergence simple sur $\mathcal{D}(\Omega)$, car elle est adaptée à notre étude et… simple. Simplicité atteinte sans se limiter, comme dans beaucoup d'ouvrages, à une *pseudo-topologie*.

En outre, cette topologie a les mêmes suites convergentes et les mêmes bornés que la topologie de la convergence uniforme sur les bornés de $\mathcal{D}(\Omega)$ utilisée par Laurent SCHWARTZ. Les motifs de notre choix sont détaillés p. 45.

Domaine ouvert et pondération. Nous considérons les distributions définies dans un ouvert Ω de $\mathbb{R}^d$. Celles-ci n'ayant pas nécessairement de prolongement dans tout $\mathbb{R}^d$, nous introduisons une opération, la pondération, qui joue pour Ω un rôle analogue à celui joué par la convolution pour $\mathbb{R}^d$ et qui intervient constamment.

La pondérée $f \diamond \mu$ d'une distribution f, définie dans un ouvert Ω, par un poids μ, poids qui est une distribution réelle dans $\mathbb{R}^d$ à support compact D, est une distribution définie dans l'ouvert $\Omega_D = \{x \in \mathbb{R}^d : x + D \subset \Omega\}$. Lorsque f et μ sont des fonctions, elle vaut $(f \diamond \mu)(x) = \int_{\mathring{D}} f(x+y)\mu(y)\,\mathrm{d}y$. Lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$, on retrouve la convolution à une symétrie près sur μ, et on retrouve toutes ses propriétés à un signe éventuel près.

Primitives. Nous montrons qu'un champ de distributions $q = (q_1, \dots, q_d)$ a une primitive f, c'est-à-dire que $\nabla f = q$, si et seulement si elle vérifie $\langle q, \psi\rangle = 0_E$ pour tous les champs tests $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_d)$ tels que $\nabla \cdot \psi = 0$. Nous déterminons explicitement toutes les primitives et nous en déterminons une qui dépend continûment de q.

Nous montrons également que, lorsque Ω est simplement connexe, il faut et il suffit que $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j.

Séparation des variables. Nous montrons que la séparation des variables est bijective de $\mathcal{D}'(\Omega_1 \times \Omega_2; E)$ sur $\mathcal{D}'(\Omega_1; \mathcal{D}'(\Omega_2; E))$ à l'aide d'inégalités, certes laborieuses à établir mais qui évitent le recours aux difficiles propriétés topologiques utilisées par Laurent SCHWARTZ dans sa diabolique démonstration du théorème des noyaux.

L'intérêt de cette méthode est exposé dans le commentaire *Originalité…*, p. 315.

Intégration. L'intégration des fonctions continues est indispensable pour leur identification à des distributions par l'égalité $\langle f, \varphi \rangle = \int f\varphi$, pour toute fonction test φ. La théorie de l'intégration n'ayant pas été faite pour les valeurs dans un espace de Neumann, nous avons établi, au volume 2, les résultats relatifs aux fonctions uniformément continues suffisant à nos besoins. Nous les rappelons avant de les utiliser.

La théorie générale de l'intégration à valeurs dans un espace de Neumann sera faite, dans un prochain volume, dans le cadre des *distributions intégrables* qui jouent le rôle des habituelles *classes de fonctions intégrables presque partout égales*. En effet, il nous a paru plus simple de construire ainsi l'intégration générale.

Pré-requis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel qu'à des définitions et des résultats établis aux volumes 1 et 2, rappelés en annexe ou dans le texte, avec les références de leurs démonstrations.

Ce livre est rédigé pour pouvoir être lu dans le désordre par un non-spécialiste : les démonstrations sont détaillées en incluant des arguments triviaux pour un connaisseur et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés. Détails d'autant plus nécessaires[3] que la majorité des résultats sont des généralisations, nouvelles, aux fonctions et distributions à valeurs dans un espace de Neumann de propriétés classiques pour les valeurs dans un espace de Banach.

Je sollicite l'indulgence du lecteur pour la lourdeur qui peut en résulter.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères peuvent, contrairement au corps du texte, faire appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. L'annexe *Rappels* est, elle aussi, composée en petits caractères car elle peut être supposée connue.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est, autant que possible, précisée en notes[4] de bas de page.

---

3. **Détails nécessaires.** Comme l'a expliqué Laurent SCHWARTZ en préambule à un de ses articles [70, p. 88] : ⟪Bien que beaucoup de démonstrations soient relativement faciles, il nous a paru utile de les écrire *in extenso*, car toutes les fois qu'interviennent les espaces vectoriels topologiques, il y a de tels "pièges" qu'une grande rigueur est nécessaire.⟫
L'immense et rigoureux Augustin CAUCHY ayant, lui-même, donné un résultat faux, nous n'avons reculé devant aucun détail. Rappelons que c'est dans son remarquable *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique* de 1821 qu'il indique prouver ⟪aisément⟫ [18, p. 46] que, si une fonction réelle de deux variables réelles est continue par rapport à chacune des variables, elle est continue par rapport à leur couple. Il faudra attendre 1870 pour que Carl Johannes THOMAE [89, p. 15] montre que c'est inexact.

4. **Historique. Objectif.** Il s'agit avant tout de rendre hommage aux mathématiciens dont les travaux ont rendu possible et inspiré ce livre. Même si tous n'y sont pas, faute de place ou de connaissance. Et de montrer que les mathématiques sont une construction humaine, ancienne, pas une vérité révélée, et que derrière chaque théorème il y a un ou plusieurs hommes, contemporains ou ancêtres lointains qui — grecs inclus — raisonnaient aussi bien que nous, sans internet ni ordinateur, voire sans imprimerie ni papier.

Navigation dans le livre.
— La **table des matières**, en tête du livre, donne la liste des thèmes traités.
— L'**index**, p. 373, fournit un autre accès thématique.
— La **table des notations**, p. 369, précise leur sens en cas de doute.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés afin de les retrouver aisément en suivant l'ordre des numéros (ainsi, le théorème 2.2 se trouve entre les énoncés 2.1 et 2.3, qui sont des définitions).

Remerciements. Je suis particulièrement redevable à Enrique FERNÁNDEZ-CARA qui a relu les innombrables versions successives de ce travail, sans se lasser et en me suggérant amicalement de non moins innombrables améliorations à chacune d'elles.

Fulbert MIGNOT m'a suggéré, entre autres, de précéder chaque chapitre d'une brève présentation. Ce fut salutaire : pour exposer la ligne directrice, il m'a fallu la dégager et réécrire plusieurs parties.

Les lectures méticuleuses et savantes d'Olivier BESSON, Didier BRESCH et Pierre DREYFUSS ont contribué à des améliorations très substantielles.

Jérôme LEMOINE, mon disciple — c'est un stigmate et une croix qu'il porte à vie — a eu pour mission de relire les démonstrations ; il est donc entièrement responsable des erreurs éventuelles… excepté, peut-être, celles que j'aurai ajoutées depuis.

Jacques BLUM a su me convaincre qu'il était temps de publier. En effet.

Merci, mes amis, pour votre aide et votre soutien chaleureux.

Jacques SIMON
Chapdes-Beaufort, le 30 mars 2021

Les oubliés. Les Français sont probablement sur-représentés, comme ils le sont dans nos bibliothèques, dans nos enseignements et souvent dans nos cœurs. Parmi les Français, je suis sur-représenté, parce que ce livre est l'aboutissement de trente ans de travail pour simplifier et généraliser les distributions à valeurs vectorielles. Laurent SCHWARTZ, ma première source d'inspiration et d'admiration, est peut-être aussi sur-représenté car, ses traités n'étant pas pourvus de notices historiques, dû à sa grande modestie, je lui ai attribué la totalité de ce qu'ils contiennent. À l'inverse, Russes et Européens de l'Est sont probablement particulièrement sous-représentés, à cause de l'éloignement linguistique, aggravé par l'ignorance mutuelle entre l'Est et l'Ouest pendant la période soviétique.

Nouveautés. Au péril de l'immodestie, *nobody is perfect*, j'ai abondamment signalé les résultats que je crois nouveaux, tant pour éveiller la vigilance du lecteur — il n'est pas exclu que ce livre contienne quelque ânerie — que pour attirer son attention sur les outils nouveaux à sa disposition.

Appel au lecteur. Nombre de résultats importants n'ont pas de note historique, car j'en ignore tout. Je sollicite l'indulgence du lecteur pour ces lacunes et, surtout, pour les injustices qu'il pourra relever. Et je fais appel aux érudits pour me signaler les améliorations à apporter… pour les rééditions.