

Table des matières

Introduction	xi
Chapitre 1. Espaces semi-normés et espaces fonctionnels	1
1.1. Espaces semi-normés	1
1.2. Comparaison des espaces semi-normés	4
1.3. Applications continues	6
1.4. Fonctions dérivables	8
1.5. Espaces $\mathcal{C}^m(\Omega; E)$, $\mathcal{C}_b^m(\Omega; E)$ et $\mathcal{C}_b^m(\Omega; E)$	11
1.6. Intégrale d'une fonction uniformément continue	14
Chapitre 2. Espace des fonctions tests	17
2.1. Fonctions à support compact	17
2.2. Compacité dans leur ensemble de supports de fonctions	19
2.3. Espace $\mathcal{D}(\Omega)$	21
2.4. Complétude séquentielle de $\mathcal{D}(\Omega)$	24
2.5. Comparaison de $\mathcal{D}(\Omega)$ à divers espaces	26
2.6. Suites convergentes de $\mathcal{D}(\Omega)$	28
2.7. Recouvrement en couronnoïdes et partition de l'unité	33
2.8. Contrôle de normes des $\mathcal{C}_K^m(\Omega)$ par les semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$	35
2.9. Semi-normes continues dans $\mathcal{C}_K^\infty(\Omega)$ pour tout K	38
Chapitre 3. Espace des distributions	41
3.1. Espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	41
3.2. Caractérisations des distributions	46
3.3. Inclusion de $\mathcal{C}(\Omega; E)$ dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	48
3.4. Le cas où E n'est pas un espace de Neumann	53
3.5. Mesures	57
3.6. Fonctions continues et mesures	63

Chapitre 4. Extraction de sous-suites convergentes	67
4.1. Bornés de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	67
4.2. Convergence dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	69
4.3. Complétude séquentielle de $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	71
4.4. Compacité séquentielle dans $\mathcal{D}'(\Omega; E)$	73
4.5. Changement de l'espace E des valeurs	76
4.6. Espace E -faible	78
4.7. Espace $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ -faible et extractabilité	80
Chapitre 5. Opérations sur les distributions	83
5.1. Champs de distributions	83
5.2. Dérivées d'une distribution	86
5.3. Image par une application linéaire	93
5.4. Produit par une fonction régulière	96
5.5. Changement de variable	102
5.6. Changements de variable particuliers	109
5.7. Distributions positives	111
5.8. Distributions à valeurs dans un espace produit	115
Chapitre 6. Restriction, recollement et support des distributions	119
6.1. Restriction	119
6.2. Additivité par rapport au domaine	123
6.3. Caractère local	124
6.4. Localisation-prolongement	127
6.5. Recollement	130
6.6. Domaine d'annihilation et support	132
6.7. Propriétés du domaine d'annihilation et du support	135
6.8. Espace $\mathcal{D}'_K(\Omega; E)$	139
Chapitre 7. Pondération des distributions	143
7.1. Pondération par un poids régulier	143
7.2. Caractère régularisant de la pondération par un poids régulier	146
7.3. Dérivées et support de la pondérée par un poids régulier	149
7.4. Continuité de la pondération par un poids régulier	152
7.5. Pondération par une distribution	154
7.6. Comparaison des définitions de la pondération	157
7.7. Continuité de la pondération par une distribution	161
7.8. Dérivées et support de la pondérée par une distribution	163
7.9. Quelques propriétés de la pondération	166

Chapitre 8. Régularisation des distributions et applications	171
8.1. Régularisation locale d'une distribution	171
8.2. Quelques propriétés des régularisées locales	176
8.3. Régularisation globale d'une distribution	177
8.4. Convergence des régularisées globales	180
8.5. Propriétés de la régularisation globale	182
8.6. Commutativité et associativité de la pondération	185
8.7. Convergence uniforme des suites de distributions	190
Chapitre 9. Potentiels et fonctions singulières	193
9.1. Intégrale superficielle sur une sphère	193
9.2. Distribution associée à une fonction singulière	195
9.3. Dérivées d'une distribution associée à une fonction singulière	198
9.4. Potentiel newtonien élémentaire	200
9.5. Potentiel newtonien d'ordre n	204
9.6. Potentiel localisé	210
9.7. Masse de Dirac comme dérivées de fonctions continues	212
9.8. Potentiel de Heaviside	216
9.9. Pondération par un poids singulier	219
Chapitre 10. Circulation d'un champ continu sur un chemin	223
10.1. Circulation d'un champ continu sur un chemin \mathcal{C}^1	223
10.2. Changement de variable dans un chemin	228
10.3. Circulation sur un chemin \mathcal{C}^1 par morceaux	230
10.4. Invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local	233
10.5. Connexité et simple connexité	237
Chapitre 11. Existence de primitives de fonctions	239
11.1. Primitive d'un champ de fonctions à circulation nulle	239
11.2. Écoulement tubulaire et théorème de concentration	241
11.3. Le théorème d'orthogonalité pour les fonctions	245
11.4. Théorème de Poincaré	246
Chapitre 12. Propriétés des primitives de distributions	249
12.1. Représentation d'une distribution par ses dérivées	249
12.2. Distribution dont les dérivées sont nulles ou continues	253
12.3. Unicité d'une primitive	255
12.4. Primitive explicite localement	257
12.5. Application primitive continue	259
12.6. Distributions harmoniques, ou à laplacien continu	263

Chapitre 13. Existence de primitives de distributions	265
13.1. Recollement périphérique de primitives	266
13.2. Réduction au cas des fonctions	268
13.3. Primitive de distributions : le théorème d'orthogonalité	270
13.4. Primitive de distributions dans un ouvert simplement connexe	274
13.5. Courant d'un champ incompressible en dimension deux	277
13.6. Champs ayant des primitives locales mais pas de primitive globale	278
13.7. Comparaison des conditions d'existence d'une primitive	281
Chapitre 14. Distributions de distributions	283
14.1. Caractérisation	283
14.2. Ensembles bornés	286
14.3. Suites convergentes	287
14.4. Extraction de sous-suites convergentes	291
14.5. Changement de l'espace des valeurs	292
14.6. Distribution de distributions à valeurs dans E -faible	293
Chapitre 15. Séparation des variables d'une distribution	295
15.1. Deux propriétés des produits tensoriels de fonctions tests	295
15.2. Décomposition des fonctions tests sur un produit d'ouverts	299
15.3. Théorème de contrôle tensoriel des fonctions tests	301
15.4. Séparation des variables	307
15.5. Théorème des noyaux	310
15.6. Regroupement des variables	315
15.7. Permutation des variables	316
Chapitre 16. Distributions à valeurs dans un espace de Banach	321
16.1. Distributions d'ordre fini	321
16.2. Pondération d'une distribution d'ordre fini	324
16.3. Distribution d'ordre fini comme dérivées de fonctions continues	327
16.4. Distribution d'ordre fini comme dérivée d'une seule fonction	331
16.5. Distribution dans un Banach comme dérivées de fonctions	333
16.6. Non-représentabilité de distributions à valeurs dans un Fréchet	337
16.7. Prolongeabilité des distributions à valeurs dans un Banach	340
16.8. Annulation des distributions à valeurs dans un Banach	345
Annexe. Rappels	347
Bibliographie	365
Liste des notations et figures	369
Index	373