

Table des matières

Avant-propos	1
Partie 1. Introduction au calcul des variations	5
Chapitre 1. Les méthodes élémentaires du calcul des variations	7
1.1. Premiers problèmes d' <i>extrema</i> libres	7
1.2. Premiers problèmes d' <i>extrema</i> liés et multiplicateurs de Lagrange	11
1.2.1. Définition de multiplicateur de Lagrange	11
1.2.2. Application au problème d'extremum lié	12
1.3. Lemme fondamental du calcul des variations	14
1.4. Extremum fonctionnel libre	15
1.5. Extremum fonctionnel lié	17
1.5.1. Premier type : liaison intégrale	17
1.5.2. Deuxième type : liaison répartie	19
1.6. Problème plus général du calcul des variations	22
1.6.1. Première extension des résultats précédents	22
1.6.2. Les équations d'Euler	23
1.6.3. Première application : principe d'Hamilton	25
1.6.4. Deuxième application : étude des géodésiques des surfaces	27
Chapitre 2. Variation d'une intégrale curviligne	31
2.1. Géométrisation des problèmes variationnels	31
2.2. Première forme d'intégrale curviligne	33
2.3. Deuxième forme d'intégrale curviligne	36
2.4. Généralisation et variation d'une dérivée	39
2.5. Première application : étude du chemin optique de la lumière	42
2.5.1. Le principe de Fermat	42

2.5.2. Les lois de Descartes	45
2.6. Deuxième application : le problème des isopérimètres	47
Chapitre 3. Le théorème de Noether	51
3.1. Rappels et compléments sur les équations différentielles	51
3.2. Groupes à un paramètre et groupes de Lie	53
3.3. Intégrale invariante par un groupe de Lie	56
3.4. Retour sur le principe de Fermat	58
Partie 2. Applications à la mécanique analytique	61
Chapitre 4. Les méthodes de la mécanique analytique	63
4.1. Rappel : principe de d'Alembert ou principe des travaux virtuels	63
4.1.1. Notion de déplacement virtuel	63
4.1.2. Notion de liaisons	64
4.1.3. Formules de Lagrange	65
4.2. Retour sur la mécanique analytique	67
4.3. Les cordes vibrantes	68
4.3.1. Première étude des solutions de l'équation [4.10]	71
4.3.2. Deuxième étude des solutions de l'équation [4.10]	71
4.4. Lagrangien homogène : expression dans l'espace-temps	74
4.5. Équations d'Hamilton	77
4.5.1. Première méthode utilisant les équations de Lagrange	77
4.5.2. Deuxième méthode utilisant le principe d'Hamilton	79
4.6. Recherche d'une intégrale première à l'aide du théorème de Noether	82
4.6.1. Paramètres secondaires	82
4.6.2. Retour sur le théorème de Noether	83
4.7. Réinjection d'un résultat partiel	86
4.8. Le principe de Maupertuis	88
4.8.1. Première application : cas du point matériel	89
4.8.2. Deuxième application : introduction à la géométrie riemannienne	90
Chapitre 5. Méthode d'intégration de Jacobi	93
5.1. Changements de variables canoniques	93
5.2. La méthode de Jacobi	95
5.2.1. Un paramètre de position secondaire	98
5.2.2. Le temps paramètre secondaire	98
5.3. Le point matériel dans divers systèmes de représentation	99
5.3.1. Cas des coordonnées cartésiennes	99
5.3.2. Cas de la représentation cylindrique	100
5.3.3. Cas de la représentation sphérique	101
5.4. Le cas d'intégrabilité de Liouville	103

5.5. Un changement particulier de variables canoniques	104
5.6. Systèmes multipériodiques : variables d'action	106
Chapitre 6. Espaces de la mécanique : crochets de Poisson	109
6.1. Les espaces de la mécanique analytique	109
6.2. Variables dynamiques : crochets de Poisson	112
6.2.1. Équation d'évolution d'une variable dynamique	112
6.2.2. Intégrales premières	114
6.3. Crochets de Poisson de deux variables dynamiques	114
6.3.1. Propriétés des crochets de Poisson	115
6.3.2. Application au théorème de Noether	117
6.4. Transformations canoniques	119
6.4.1. Calcul de la matrice de Poisson	120
6.5. Remarque sur le produit scalaire symplectique	126
Partie 3. Propriétés des systèmes mécaniques	129
Chapitre 7. Propriétés de l'espace des phases	131
7.1. Flot d'un système dynamique lagrangien	131
7.2. Théorème de Liouville	133
7.2.1. Préliminaires	133
7.2.2. Application aux systèmes mécaniques	137
7.3. Théorème du retour de Poincaré	140
7.3.1. Théorème du retour	140
7.3.2. Cas de la mécanique	141
Chapitre 8. Oscillations et petits mouvements des systèmes mécaniques	143
8.1. Remarques préliminaires	143
8.2. Discussion de Weierstrass	145
8.2.1. Préliminaires	145
8.2.2. Discussion de l'équation fondamentale [8.3]	146
8.2.3. Interprétation graphique	149
8.2.4. Étude de la stabilité des positions d'équilibre	150
8.2.5. Petits mouvements autour d'une position d'équilibre	153
8.3. Position d'équilibre d'une équation différentielle autonome	156
8.4. Stabilité des positions d'équilibre d'une équation différentielle autonome	158
8.5. Une condition nécessaire de stabilité	158
8.6. Linéarisation d'une équation différentielle	162
8.6.1. Préliminaires	162
8.6.2. Application aux systèmes dynamiques lagrangiens	165

8.6.3. Petites oscillations d'un système dynamique lagrangien	167
8.7. Comportement des fréquences propres	170
8.7.1. Préliminaires	170
8.7.2. Comportement des fréquences propres en fonction de la rigidité du système	171
8.7.3. Comportement des fréquences en présence de liaisons liant les paramètres	173
8.8. Équation perturbée associée à une équation linéaire	175
Chapitre 9. Stabilité des systèmes périodiques	181
9.1. Position du problème	181
9.2. Flot d'une équation différentielle périodique	182
9.3. Étude du cas plan	184
9.3.1. Généralités	184
9.3.2. Cas pour lequel $\det \mathcal{G} = 1$	185
9.4. Stabilité forte des systèmes hamiltoniens périodiques	186
9.5. Étude de l'équation de Mathieu : résonnance paramétrique	187
9.6. Un cas complètement intégrable de l'équation de Hill	189
Partie 4. Applications	195
Chapitre 10. Problèmes et exercices	197
Chapitre 11. Solutions des problèmes et exercices	229
Annexe. Mathématiciens, mécaniciens et astronomes cités dans cet ouvrage	291
Liste des principales notations	293
Bibliographie	295
Index	297