Avant-propos

Cet ouvrage a pour but de donner un aperçu des méthodes géométriques du calcul des variations et de son application en mécanique analytique, puis d'étudier certaines des propriétés des espaces de la mécanique des systèmes à un nombre fini de degrés de liberté. Le livre s'inspire partiellement des méthodes proposées par Pierre Casal, jadis professeur à la faculté des sciences de Marseille. Ces méthodes ont été reprises et développées dans un enseignement que j'ai effectué à la faculté des sciences de Marseille en troisième année de la licence de mathématiques appliquées.

Les outils mathématiques utilisés tout le long de cet ouvrage sont ceux de l'algèbre, de l'analyse et de la géométrie différentielle élémentaires. Aucun outil de mathématique pris au-delà de la troisième année du cycle universitaire n'est nécessaire pour la compréhension de ce livre (on pourra se référer, par exemple, aux ouvrages (Martin 1967 ; Brousse 1968 ; Queyssan 1971 ; Couty et Ezra 1980)).

Dans une première partie nous présentons les méthodes géométriques du calcul des variations. Les *extrema* libres ou liés par des liaisons intégrales ou réparties y sont étudiés. Ils permettent d'introduire la notion de multiplicateur de Lagrange. Une première étude des équations d'Hamilton[1] associée à la notion de fonction génératrice en découle. La recherche des géodésiques des surfaces est aussi une application naturelle qui utilise les outils de géométrie différentielle.

Ces méthodes de géométrie différentielle se prolongent au calcul de la variation des intégrales curvilignes. Deux formes de variations sont explicitées : la première forme utilise la notion de variation d'une dérivée vectorielle, la deuxième forme est similaire à la recherche du chemin optique suivi par la lumière dans un milieu d'indice

1. On pourra noter que l'écriture de ces équations aurait été faite par Huygens, le symbole H correspondant à l'initiale de son nom.

optique variable. L'étude des lois de Descartes et celle du problème des isopérimètres en découlent. Le théorème de Noether, les groupes d'invariance associés aux équations différentielles et la notion de groupe de Lie sont un prolongement naturel de ces calculs. Ainsi, le principe de Fermat associé au chemin optique suivi par la lumière conduit à la recherche d'intégrales premières.

Les outils utilisés sont liés au calcul tensoriel faisant intervenir la structure d'espace vectoriel et de son espace dual.

Une deuxième partie présente l'application des outils précédemment développés à la mécanique des systèmes matériels à un nombre fini de degrés de liberté. Après un bref rappel du principe de d'Alembert, on introduit les notions de lagrangien défini dans l'espace-temps et de lagrangien homogène. On en déduit les équations de Lagrange et celles d'Hamilton. La recherche d'intégrale première en mécanique est alors associée au théorème de Noether développé dans la première partie. La réinjection de résultats partiels conduit, dans le cas de la conservation de l'énergie, au principe de Maupertuis et à l'introduction de la géométrie riemanienne ; il est à l'origine de la mécanique ondulatoire proposée par de Broglie.

Les méthodes d'intégration des équations de la mécanique sont analysées par la méthode de Jacobi et son application au cas important de Liouville. Les notions de variables angulaires et de variables d'action des mouvements périodiques et multipériodiques présentées par Delaunay et utiles particulièrement en mécanique céleste concluent cette étude.

Cette deuxième partie se termine par l'étude des espaces de la mécanique analytique dont les divers espaces des phases. Les notions de variables dynamiques, crochets de Lie et crochets de Poisson, algèbres de Lie en sont le développement naturel. Un retour est proposé sur les intégrales premières par l'étude de crochets de Poisson de deux variables dynamiques. Les transformations canoniques qui conservent la forme des équations de la mécanique dans différentes variables dynamiques conduisent à la notion de produit scalaire symplectique, premier pas vers l'étude de la géométrie symplectique.

La troisième partie est constituée par une rapide application des équations différentielles aux systèmes mécaniques. La notion de flot dans l'espace des phases conduit au théorème de Liouville indispensable en mécanique statistique. Il correspond à la conservation du volume dans cet espace et trouve son interprétation dans le théorème du retour de Poincaré.

Les petits mouvements des systèmes mécaniques sont analysés dans le cas particulier de la discussion de Weierstrass. Les positions d'équilibre des systèmes associés à des équations différentielles autonomes conduisent aux notions de stabilité au sens de Liapounov et de stabilité asymptotique. Les conditions nécessaires à la stabilité sont présentées dans le cadre du théorème de Lejeune Dirichlet. La notion de linéarisation des équations différentielles au voisinage d'une position d'équilibre permet d'étudier les petites oscillations des systèmes dynamiques lagrangiens, leurs fréquences propres ainsi que les perturbations de ces systèmes.

Cette troisième partie se termine par la stabilité des systèmes périodiques, la topologie de l'espace des phases de ces systèmes avec l'extension des notions de stabilité de Liapounov, stabilité asymptotique et la nouvelle notion de stabilité forte au voisinage d'une position d'équilibre. Les équations de Hill et de Mathieu permettent l'application de cette étude.

Le lecteur trouvera à la fin de l'ouvrage une bibliographie sommaire, un index, ainsi qu'un recueil d'exercices d'applications et de problèmes pour des cas géométriques et mécaniques.

J'exprime mes remerciements à Françoise qui a bien voulu relire les épreuves et me faire part de ses précieuses critiques.