

Table des matières

Avant-propos	1
Introduction. Éléments d'histoire des matrices et des tenseurs . . .	7
Chapitre 1. Structures algébriques	15
1.1. Introduction	15
1.2. Ensembles	18
1.2.1. Définitions	18
1.2.2. Ensembles de nombres	19
1.2.3. Produit cartésien d'ensembles	20
1.2.4. Opérations avec des ensembles	20
1.2.5. Règles de de Morgan	21
1.2.6. Fonctions caractéristiques	22
1.2.7. Partitions	22
1.2.8. Tribus ou σ -algèbres	22
1.2.9. Relations d'équivalence	23
1.2.10. Relations d'ordre	24
1.3. Applications et composition d'applications	24
1.3.1. Définitions et propriétés	24
1.3.2. Composition d'applications	25
1.4. Structures algébriques	25
1.4.1. Lois de composition	26
1.4.2. Définitions des structures algébriques	30
1.4.3. Sous-structures	31
1.4.4. Structures quotients	31
1.4.5. Groupes	31
1.4.6. Anneaux	34
1.4.7. Corps	39

1.4.8. Modules	40
1.4.9. Espaces vectoriels	41
1.4.10. Espaces vectoriels des applications linéaires	45
1.4.11. Espaces vectoriels des applications multilinéaires	46
1.4.12. Sous-espaces vectoriels	49
1.4.13. Bases	52
1.4.14. Somme et somme directe de sous-espaces	54
1.4.15. Espaces vectoriels quotients	55
1.4.16. Algèbres	56
1.5. Morphismes	58
1.5.1. Morphismes de groupes	59
1.5.2. Morphismes d'anneaux	59
1.5.3. Morphismes d'espaces vectoriels ou applications linéaires	60
1.5.4. Morphismes d'algèbres	64

Chapitre 2. Espaces de Banach et de Hilbert – Séries de Fourier et polynômes orthogonaux 65

2.1. Introduction	65
2.2. Espaces métriques	68
2.2.1. Définition d'une distance	68
2.2.2. Définition d'une topologie	68
2.2.3. Exemples de distances	69
2.2.4. Inégalités et distances équivalentes	70
2.2.5. Distance et convergence des suites	70
2.2.6. Distance et continuité locale d'une fonction	71
2.2.7. Isométries et applications lipschitziennes	71
2.3. Espaces vectoriels normés	71
2.3.1. Définition d'une norme et inégalités triangulaires	72
2.3.2. Exemples de normes	73
2.3.3. Normes équivalentes	77
2.3.4. Distance associée à une norme	77
2.4. Espaces préhilbertiens	78
2.4.1. Espaces préhilbertiens réels	78
2.4.2. Espaces préhilbertiens complexes	79
2.4.3. Norme induite d'un produit interne	80
2.4.4. Distance associée à un produit interne	84
2.4.5. Produits internes pondérés	84
2.5. Orthogonalité et bases orthonormées	85
2.5.1. Vecteurs orthogonaux/perpendiculaires et théorème de Pythagore	85
2.5.2. Sous-espaces orthogonaux et supplémentaire orthogonal	86
2.5.3. Bases orthonormées	88
2.5.4. Endomorphismes orthogonaux/unitaires et isométries	88

2.6. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	89
2.6.1. Projection orthogonale sur un sous-espace	89
2.6.2. Projeté orthogonal et développement de Fourier	89
2.6.3. Inégalité de Bessel et égalité de Parseval	91
2.6.4. Procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt	92
2.6.5. Décomposition QR	93
2.6.6. Application à l'orthonormalisation d'un ensemble de fonctions	95
2.7. Espaces de Banach et de Hilbert	97
2.7.1. Espaces métriques complets	98
2.7.2. Adhérence, densité et séparabilité	99
2.7.3. Définitions des espaces de Banach et de Hilbert	100
2.7.4. Exemples d'espaces de Hilbert	100
2.7.5. Bases hilbertiennes	103
2.8. Développements en séries de Fourier	106
2.8.1. Série de Fourier, égalité de Parseval et inégalité de Bessel	106
2.8.2. Cas des fonctions 2π -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	107
2.8.3. Cas des fonctions T -périodiques de \mathbb{R} dans \mathbb{C}	112
2.8.4. Sommes partielles de Fourier et inégalité de Bessel	112
2.8.5. Convergence des séries de Fourier	113
2.8.6. Exemples de séries de Fourier	117
2.9. Développements sur des bases de polynômes orthogonaux	127

Chapitre 3. Algèbre matricielle 133

3.1. Introduction	133
3.2. Espaces vectoriels de matrices	134
3.2.1. Notations et définitions	134
3.2.2. Cas des matrices partitionnées	136
3.2.3. Structure d'espace vectoriel	137
3.3. Quelques matrices particulières	138
3.4. Transposition et transconjugaison	139
3.5. Vectorisation	140
3.6. Produit scalaire, norme et orthogonalité de vecteurs	141
3.6.1. Produit scalaire	141
3.6.2. Norme euclidienne/hermitienne	142
3.6.3. Orthogonalité	143
3.7. Produit de matrices	143
3.7.1. Définition et propriétés	143
3.7.2. Puissances de matrices	145
3.8. Trace, produit interne de matrices et norme de Frobenius	148
3.8.1. Définition et propriétés de la trace	148
3.8.2. Produit interne de matrices	149
3.8.3. Norme de Frobenius	150
3.9. Sous-espaces associés à une matrice	150

3.10. Rang matriciel	152
3.10.1. Définitions et propriétés	152
3.10.2. Rang d'une somme et d'une différence de matrices	154
3.10.3. Sous-espaces associés à un produit de matrices	154
3.10.4. Rang d'un produit de matrices	155
3.11. Déterminant, inverses et inverses généralisées	156
3.11.1. Déterminant	156
3.11.2. Matrices de Gram, gramien et inégalité de Hadamard	159
3.11.3. Inverse	160
3.11.4. Solution d'un système homogène d'équations linéaires	162
3.11.5. Inverse d'une matrice complexe	162
3.11.6. Matrices orthogonales et matrices unitaires	163
3.11.7. Matrices auto-inverses et matrices anti-auto-inverses	164
3.11.8. Inverses à gauche et à droite d'une matrice rectangulaire	165
3.11.9. Inverses généralisées	168
3.11.10. Pseudo-inverse de Moore-Penrose	169
3.12. Groupes multiplicatifs de matrices	171
3.13. Matrice associée à une application linéaire	173
3.13.1. Représentation matricielle d'une application linéaire	173
3.13.2. Changement de base	176
3.13.3. Cas d'un endomorphisme	177
3.13.4. Cas d'un endomorphisme nilpotent	180
3.13.5. Matrices équivalentes, semblables et congruentes	180
3.14. Matrice associée à une forme bilinéaire/sesquilinéaire	182
3.14.1. Définition d'une application bilinéaire/sesquilinéaire	182
3.14.2. Matrice associée à une forme bilinéaire/sesquilinéaire	183
3.14.3. Changement de bases avec une forme bilinéaire	184
3.14.4. Changement de bases avec une forme sesquilinéaire	185
3.14.5. Formes bilinéaires/sesquilinéaires symétriques	186
3.15. Formes quadratiques et formes hermitiennes	188
3.15.1. Formes quadratiques	188
3.15.2. Formes hermitiennes	190
3.15.3. Formes quadratiques/hermitiennes définies positives/négatives	191
3.15.4. Exemples de formes quadratiques définies positives	192
3.15.5. Inégalités de Cauchy-Schwarz et de Minkowski	193
3.15.6. Orthogonalité, noyau, rang et dégénérescence d'une forme bilinéaire	194
3.15.7. Réduction de Gauss et loi d'inertie de Sylvester	195
3.16. Valeurs propres et vecteurs propres	198
3.16.1. Polynôme caractéristique et théorème de Cayley-Hamilton	198
3.16.2. Valeurs propres à droite	200
3.16.3. Spectre, rayon spectral et conditions de singularité/régularité	202
3.16.4. Vecteurs propres à gauche	202

3.16.5. Propriétés des vecteurs propres	202
3.16.6. Valeurs propres et vecteurs propres d'une matrice régularisée . .	204
3.16.7. Autres propriétés des valeurs propres	205
3.16.8. Cas des matrices symétriques/hermitiennes	206
3.16.9. Cas des matrices orthogonales/unitaires	207
3.16.10. Valeurs propres et <i>extrema</i> du quotient de Rayleigh	208
3.17. Valeurs propres généralisées	210

Chapitre 4. Matrices partitionnées 213

4.1. Introduction	213
4.2. Sous-matrices	214
4.3. Matrices partitionnées	215
4.4. Produits de matrices et matrices partitionnées	216
4.4.1. Produit de matrices	216
4.4.2. Produit de Kronecker de vecteurs	216
4.4.3. Produit de Kronecker de matrices	217
4.4.4. Produit de Khatri-Rao	218
4.5. Cas particuliers de matrices partitionnées	219
4.5.1. Matrices blocs-diagonales	219
4.5.2. Matrices signatures	219
4.5.3. Somme directe	220
4.5.4. Formes de Jordan	220
4.5.5. Matrices blocs-triangulaires	221
4.5.6. Matrices blocs-Toeplitz et blocs-Hankel	221
4.6. Transposition et transconjugaison	222
4.7. Trace	222
4.8. Vectorisation	223
4.9. Addition par bloc	223
4.10. Multiplication par bloc	223
4.11. Produit de Hadamard de matrices partitionnées	224
4.12. Produit de Kronecker de matrices partitionnées	225
4.13. Opérations élémentaires et matrices élémentaires	227
4.14. Inversion de matrices partitionnées	229
4.14.1. Inversion de matrices blocs-diagonales	230
4.14.2. Inversion de matrices blocs-triangulaires	230
4.14.3. Bloc-triangularisation et compléments de Schur	231
4.14.4. Bloc-diagonalisation et bloc-factorisation	232
4.14.5. Bloc-inversion et inverse partitionnée	232
4.14.6. Autres écritures de l'inverse partitionnée 2×2	233
4.14.7. Inversion d'un système partitionné d'équations linéaires	235
4.14.8. Inversion d'une matrice grammienne partitionnée	235
4.14.9. Inversion récursive d'une matrice carrée partitionnée	236
4.14.10. Lemme d'inversion matricielle et applications	236
4.15. Inverses généralisées de matrices blocs 2×2	238

- 4.16. Déterminants de matrices partitionnées 239
 - 4.16.1. Déterminant de matrices blocs-diagonales 239
 - 4.16.2. Déterminant de matrices blocs-triangulaires 240
 - 4.16.3. Cas d'une matrice partitionnée avec blocs diagonaux carrés 240
 - 4.16.4. Déterminants de matrices partitionnées particulières 241
 - 4.16.5. Valeurs propres de **CB** et **BC** 242
- 4.17. Rang de matrices partitionnées 243
- 4.18. Algorithme de Levinson 245
 - 4.18.1. Processus AR et équations de Yule-Walker 246
 - 4.18.2. Algorithme de Levinson-Durbin 248
 - 4.18.3. Prédiction linéaire 252

Chapitre 5. Espaces tensoriels et tenseurs 259

- 5.1. Introduction 259
- 5.2. Hypermatrices 260
 - 5.2.1. Espaces vectoriels d'hypermatrices 260
 - 5.2.2. Produit interne d'hypermatrices et norme de Frobenius 261
 - 5.2.3. Opération de contraction et produit mode- n hypermatrice-matrice 262
- 5.3. Produits extérieurs 265
- 5.4. Formes multilinéaires, polynômes homogènes et hypermatrices 267
 - 5.4.1. Hypermatrice associée à une forme multilinéaire 267
 - 5.4.2. Formes multilinéaires symétriques et hypermatrices symétriques 269
- 5.5. Applications multilinéaires et polynômes homogènes 271
- 5.6. Espaces tensoriels et tenseurs 272
 - 5.6.1. Définitions 272
 - 5.6.2. Multilinéarité et associativité 273
 - 5.6.3. Tenseurs et hypermatrices de coordonnées 274
 - 5.6.4. Écriture canonique des tenseurs 275
 - 5.6.5. Développement du produit tensoriel de N vecteurs 276
 - 5.6.6. Propriétés du produit tensoriel 278
 - 5.6.7. Formule de changement de bases 283
- 5.7. Rang tensoriel et décompositions tensorielles 284
 - 5.7.1. Rang matriciel 284
 - 5.7.2. Rang d'une hypermatrice 285
 - 5.7.3. Rang symétrique d'une hypermatrice 286
 - 5.7.4. Propriétés comparatives des hypermatrices et des matrices 286
 - 5.7.5. CPD et réduction de dimensionnalité 288
 - 5.7.6. Rang tensoriel 291
- 5.8. Valeurs propres et valeurs singulières d'une hypermatrice 291
- 5.9. Isomorphismes d'espaces tensoriels 294

Bibliographie 297

Index 307