

Avant-propos

Ce livre fait partie d'une collection de quatre volumes consacrés aux matrices et aux tenseurs, avec des applications liées au traitement du signal. Bien que le titre de cette collection suggère une orientation vers le traitement du signal, les résultats et les méthodes présentées devraient être aussi d'utilité pour des lecteurs d'autres disciplines.

Écrire des ouvrages sur les matrices est un véritable défi tant d'excellents livres traitant de ce sujet ont déjà été écrits¹. Comment se démarquer alors de l'existant et quel fil d'ariane dérouler ? Une manière de se différencier était de traiter en parallèle les matrices et les tenseurs. Ces derniers, vus comme une extension des matrices à des ordres supérieurs à deux, présentent beaucoup de similitudes avec les matrices, mais aussi des différences importantes en termes de notion de rang, d'unicité de décomposition, et de potentialité de représentation de données multidimensionnelles, multimodales, et imprécises. Quant au fil conducteur, il consiste à présenter les fondements structurels, puis des décompositions tant matricielles que tensorielles et les méthodes de traitement associées, pour aboutir aux applications, *via* un exposé le plus *self-contained* possible, et en apportant une certaine originalité dans les sujets traités et la manière de les traiter.

Ainsi, dans le volume 2, nous utiliserons une convention indicielle généralisant la convention de sommation d'Einstein, pour écrire et démontrer certaines équations faisant intervenir des quantités multi-indices, comme c'est le cas avec les matrices et les tenseurs. Un chapitre sera entièrement dédié aux produits de Hadamard, de Kronecker et de Khatri-Rao qui jouent un rôle très important en calculs matriciel et tensoriel.

1. Une liste d'ouvrages, loin d'être exhaustive, est fournie dans l'introduction.

Après un rappel des principales décompositions matricielles, avec une présentation détaillée de la SVD (pour *singular value decomposition*, en anglais), nous présentons différentes opérations tensorielles, ainsi que les deux principales décompositions tensorielles qui seront à la base de développements tant fondamentaux qu'appliqués, dans les deux derniers volumes. Ces décompositions tensorielles standard peuvent être vues comme des extensions de la SVD matricielle aux tenseurs d'ordre supérieur à deux. Quelques exemples de mise en équation de problèmes de traitement du signal seront fournis pour illustrer l'utilisation de telles décompositions. Deux autres chapitres concerneront les quaternions et les matrices quaternioniques, d'une part, et les matrices polynomiales, d'autre part.

Dans le volume 3, un chapitre sera consacré aux matrices structurées. Différentes propriétés seront mises en évidence et des extensions aux tenseurs d'ordre supérieur à deux seront présentées. Un survol de plusieurs modèles tensoriels sera fait, *via* la prise en compte de contraintes (structurelles, de dépendance linéaire des facteurs, de parcimonie, de non-négativité). Certains de ces modèles seront exploités dans le volume 4, pour la conception de systèmes de communication numérique. Les réseaux de tenseurs et les trains de tenseurs seront aussi présentés pour la représentation et l'analyse de données massives (*Big Data*). L'aspect algorithmique sera pris en considération avec la présentation de différentes méthodes de traitement.

Le volume 4 sera principalement consacré aux approches tensorielles pour le traitement d'antenne, les communications numériques sans fil (tout d'abord point à point, puis coopératives), la modélisation et l'identification de systèmes tant linéaires que non linéaires, et la reconstruction de données manquantes dans des matrices et des tenseurs de données. Pour ces différentes applications, la modélisation à l'aide de modèles tensoriels sera plus particulièrement détaillée. Des résultats de simulation numérique du type Monte-Carlo seront fournis pour illustrer certaines méthodes. Ce sera plus particulièrement le cas des récepteurs semi-aveugles développés récemment pour des systèmes de communication sans fil.

Les matrices et les tenseurs, et de manière plus générale l'algèbre linéaire et l'algèbre multilinéaire, sont des sujets à la fois passionnants, vastes et fondamentaux, tant pour l'enseignement et la recherche que pour les applications. Il est important de noter ici que les choix faits pour le contenu de ces ouvrages n'ont pas été guidés par des programmes d'enseignement, ce qui explique certaines lacunes par rapport à des traités d'algèbre standard. Le fil conducteur a plutôt été de présenter les définitions, les propriétés, les concepts et les résultats nécessaires à une bonne compréhension des méthodes de traitement et des applications considérées dans ces ouvrages. Outre la grande diversité des sujets à traiter, une autre difficulté a résidé dans l'ordre de les aborder, du fait que beaucoup de sujets se chevauchent, certaines notions et/ou certains résultats étant parfois utilisés avant d'avoir été définis et/ou démontrés, ce qui nécessite de renvoyer le lecteur aux sections ou aux chapitres qui suivent.

Quatre particularités sont à souligner. La première est relative au lien étroit entre certains sujets traités, certaines méthodes présentées, et des résultats de recherche récents, particulièrement en ce qui concerne les approches tensorielles pour le traitement du signal. La deuxième traduit la volonté de situer les résultats énoncés dans leur contexte historique, à travers quelques renseignements biographiques sur certains auteurs cités, et des listes de références assez complètes pour approfondir certains résultats, mais aussi pour étendre les sources bibliographiques fournies. Ceci a motivé l'introduction, intitulée « Éléments d'histoire des matrices et des tenseurs ».

Les deux dernières particularités concernent la présentation et l'illustration des propriétés et des méthodes considérées. Certaines seront fournies sans démonstration, du fait de la simplicité ou de la disponibilité de celle-ci dans beaucoup d'ouvrages. D'autres feront l'objet de démonstration, soit pour des raisons pédagogiques, leur connaissance pouvant permettre de mieux comprendre les résultats démontrés, soit en raison de la difficulté à les trouver dans la littérature, soit encore du fait de l'originalité des démonstrations proposées comme ce sera le cas, par exemple, de celles faisant usage de la convention indicelle. À noter aussi l'utilisation de nombreux tableaux permettant de rappeler les principaux résultats, tout en les présentant d'une manière synthétique et comparative.

Enfin, de nombreux exemples seront fournis pour illustrer certaines définitions, propriétés, décompositions et méthodes présentées. Ceci sera tout particulièrement le cas du quatrième volume, consacré aux applications des outils tensoriels, qui a été ma principale source de motivation. Après une quinzaine d'années dédiées à des travaux de recherche (pionniers pour certains) visant à rapprocher la modélisation et l'identification de systèmes dynamiques non linéaires des décompositions tensorielles, et à concevoir de nouveaux systèmes de communication sans fil basés sur de nouveaux modèles tensoriels, il m'a semblé utile de faire part de cette expérience et de ce cheminement scientifique pour essayer de rendre l'outil tensoriel le plus accessible possible et de motiver de nouvelles applications basées sur des approches tensorielles.

Ce premier volume dont nous décrivons le contenu ci-après, fournit une introduction aux matrices et aux tenseurs *via* les structures d'espaces vectoriels et d'espaces tensoriels, avec la présentation de concepts et de résultats fondamentaux. Dans une première partie (voir chapitres 1 et 2), nous rappelons les bases mathématiques relatives aux structures algébriques classiques, en mettant en évidence une complexification croissante des structures considérées, allant des monoïdes aux espaces vectoriels et aux algèbres. Les notions de norme, de produit interne, de projection orthogonale et de base hilbertienne sont détaillées, avec l'introduction des espaces de Banach et de Hilbert, *via* les espaces vectoriels normés et les espaces préhilbertiens. L'approche hilbertienne, fondamentale pour le traitement de signaux, est illustrée à l'aide de deux méthodes très utilisées pour la représentation et l'analyse de signaux, et pour l'approximation de fonctions : les développements en séries de Fourier et sur des bases de polynômes orthogonaux.

Le chapitre 3 est consacré à l'algèbre matricielle. Les notions de sous-espaces fondamentaux associés à une matrice, de rang, de déterminant, d'inverse, d'auto-inverse, d'inverse généralisée et de pseudo-inverse sont décrites. Les représentations matricielles des applications linéaires et des formes bilinéaires/sesquilineaires sont établies. L'effet d'un changement de bases est étudié, débouchant sur la définition de matrices équivalentes, de matrices semblables et de matrices congruentes. Les formes bilinéaires et sesquilineaires symétriques permettent respectivement d'introduire les matrices symétriques et les matrices hermitiennes. Puis, les formes quadratiques et hermitiennes définies positives/négatives conduisent aux matrices définies positives/négatives. La méthode d'élimination de Gauss pour la réduction de formes quadratiques, sous la forme d'une combinaison linéaire de carrés de formes linéaires, et la loi d'inertie de Sylvester permettant de classer les formes quadratiques sont brièvement présentées. Les notions de valeur propre et de vecteur propre sont ensuite définies, conduisant à la décomposition propre d'une matrice, sujet qui sera traité dans le volume 2. Les cas de certaines matrices structurées, comme les matrices symétriques/hermitiennes et les matrices orthogonales/unitaires sont plus particulièrement considérés. L'interprétation des valeurs propres comme *extrema* du quotient de Rayleigh est présentée, avant d'introduire la notion de valeur propre généralisée.

Dans le chapitre 4, nous considérons les matrices partitionnées en blocs. Ce type de structure est inhérent aux produits de matrices en général, et aux produits de Kronecker et de Khatri-Rao en particulier. Les matrices partitionnées correspondant aux matrices blocs-diagonales et blocs-triangulaires et aux formes de Jordan sont décrites. Puis, les opérations de transposition/transconjugaison, d'addition et de multiplication par bloc, sont présentées. Les produits de Hadamard et de Kronecker de matrices partitionnées sont aussi envisagés. Les opérations élémentaires et les matrices associées permettant de décomposer les matrices partitionnées sont détaillées. Ces opérations sont ensuite exploitées pour obtenir la bloc-triangularisation, la bloc-diagonalisation et la bloc-inversion de matrices partitionnées. Le lemme d'inversion matricielle, qui est très utilisé en traitement du signal, est déduit des formules de bloc-inversion. Ce lemme est utilisé pour démontrer quelques formules d'inversion très souvent rencontrées dans les calculs. Des résultats fondamentaux sur les notions d'inverse généralisée, de déterminant et de rang de matrices partitionnées sont présentés. L'algorithme de Levinson est démontré à l'aide de la formule d'inversion d'une matrice carrée partitionnée, récursive par rapport à l'ordre de la matrice. Cet algorithme, qui est l'un des plus célèbres en traitement du signal, permet de résoudre respectivement, et de façon numériquement efficace, les problèmes d'estimation de paramètres d'un modèle autorégressif (AR), et de prédiction linéaire, récursivement par rapport à l'ordre du modèle AR et du prédicteur. Pour illustrer les résultats du chapitre 2 relatifs à la projection orthogonale, nous montrons que les prédicteurs linéaires direct et rétrograde, optimaux au sens de l'EQMM (Erreur quadratique moyenne minimum), peuvent être interprétés en termes de projecteurs orthogonaux sur des sous-espaces de l'espace hilbertien des signaux aléatoires stationnaires au second ordre.

Dans le chapitre 5, les hypermatrices et les tenseurs sont définis en lien étroit avec les applications et les formes multilinéaires. Après avoir défini les espaces vectoriels d'hypermatrices, certaines opérations telles que le produit interne et la contraction d'hypermatrices sont décrites, avec le cas particulier important du produit mode- n hypermatrice-matrice. La notion de produit extérieur est introduite de façon générale, c'est-à-dire en étendant le produit extérieur de vecteurs utilisé dans le chapitre 3 pour définir une matrice de rang un. Puis, l'hypermatrice associée à une forme multilinéaire est mise en évidence, un résultat qui généralise au cas multilinéaire d'ordre quelconque les matrices associées à une application linéaire et à une forme bilinéaire, qui ont été introduites dans le chapitre 3. Les tenseurs d'ordre $N > 2$ sont ensuite définis de façon formelle comme éléments d'un espace tensoriel, c'est-à-dire le produit tensoriel de N espaces vectoriels. L'écriture canonique d'un tenseur est présentée, avec la notion d'hypermatrice de coordonnées. La propriété de symétrie d'un tenseur ainsi que la propriété universelle du produit tensoriel sont détaillées, cette dernière étant illustrée à l'aide du produit de Khatri-Rao et du produit scalaire de vecteurs. L'effet d'un changement de bases dans les espaces vectoriels d'un produit tensoriel sur l'hypermatrice de coordonnées d'un tenseur est étudié. Les notions de rang tensoriel basé sur la décomposition polyadique canonique d'un tenseur, et de valeur propre et de valeur singulière d'un tenseur sont introduites, en mettant en évidence les similitudes et les différences qui existent entre matrices et tenseurs d'ordre supérieur à deux. Enfin, la notion de dépliement tensoriel est illustrée *via* la définition d'isomorphismes d'espaces tensoriels.

Je tiens à remercier mes collègues Sylvie Icart et Vicente Zarzoso pour leur relecture de certains chapitres, ainsi que Henrique de Morais Goulart, qui a corédigé le chapitre 3.

Éléments d'histoire des matrices et des tenseurs

Cette introduction a nullement pour objectif de faire un historique rigoureux et exhaustif de la théorie des matrices et des tenseurs. Un tel historique relève du travail d'un historien des mathématiques, et nécessiterait de faire une recherche bibliographique approfondie, avec lecture des publications originales des auteurs cités pour analyser et reconstituer le cheminement de la pensée mathématique à travers les années et les collaborations. Une illustration très intéressante de ce type d'analyse est fournie, par exemple, sous la forme d'une « représentation de réseaux de recherche » par Frédéric Brechenmacher¹, sur la période 1880-1907, où sont mises en évidence les interactions et les influences de certains mathématiciens comme James Joseph Sylvester (1814-1897), Karl Theodor Weierstrass (1815-1897), Arthur Cayley (1821-1895), Leopold Kronecker (1823-1891), Ferdinand Georg Frobenius (1849-1917), ou encore Eduard Weyr (1852-1903), relatives à la théorie des matrices, la théorie des nombres (quaternions, nombres hypercomplexes), les formes bilinéaires et les structures algébriques.

Notre modeste objectif est ici de situer dans le temps les contributions de quelques mathématiciens et physiciens² qui ont posé les fondements de la théorie des matrices

1. Brechenmacher, F. (2006). Les matrices : formes de représentation et pratiques opératoires (1850-1930) [En ligne]. Disponible à l'adresse : <https://hal.archives-ouvertes.fr/hal-00637378/document> [Consulté le 20 décembre 2006].

2. Pour plus d'information concernant les mathématiciens cités dans cette introduction, consulter le document *Biographies de mathématiciens célèbres*, par Johan Mathieu (2008) et le remarquable site Mac Tutor History of Mathematics Archive (<http://www-history.mcs.st-andrews.ac.uk>) de l'université de Saint Andrews, en Écosse, qui contient de très nombreuses biographies de mathématiciens.

et des tenseurs, et auxquels nous ferons référence dans la suite de notre exposé. Ce choix est forcément très incomplet.

Les premières études des déterminants, qui ont précédé celles des matrices, ont été menées indépendamment par le mathématicien japonais Seki Kowa (1642-1708) et le mathématicien allemand Gottfried Leibniz (1646-1716), puis par le mathématicien écossais Colin Maclaurin (1698-1746) pour la résolution de systèmes d'équations linéaires 2×2 et 3×3 . Ces travaux ont ensuite été généralisés par le mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752) pour la résolution de systèmes $n \times n$, aboutissant, en 1750, aux célèbres formules qui portent son nom, dont la démonstration est due à Augustin-Louis Cauchy (1789-1857).

En 1772, Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) a défini la notion de déterminant, et Pierre-Simon Laplace (1749-1827) a formulé le calcul des déterminants par récurrence *via* un développement selon une ligne ou une colonne, développement qui sera présenté dans la section 3.11.1. En 1773, Joseph-Louis Lagrange (1736-1813) a découvert le lien entre le calcul des déterminants et celui des volumes. En 1812, Cauchy a utilisé, pour la première fois, le déterminant dans le sens qu'il a aujourd'hui, et a établi la formule du déterminant du produit de deux matrices rectangulaires, formule qui avait été trouvée indépendamment par Jacques Binet (1786-1856), et qui porte aujourd'hui le nom de formule de Binet-Cauchy.

En 1810, Johann Carl Friedrich Gauss (1777-1855) a introduit une notation en tableau, proche de la notation matricielle, pour écrire un système d'équations linéaires 3×3 , et il a proposé la méthode d'élimination, dite méthode du pivot de Gauss, pour le résoudre. Cette méthode, appelée aussi élimination de Gauss-Jordan, était en fait connue des mathématiciens chinois (au 1^{er} siècle). Elle a été présentée sous une forme moderne, par Gauss, à l'occasion du développement théorique de la méthode des moindres carrés, méthode qui avait été introduite par Adrien-Marie Legendre (1752-1833), en 1805.

Plusieurs déterminants de matrices particulières sont désignés par les noms de leurs auteurs, comme les déterminants de Vandermonde, de Cauchy, de Gram, de Hilbert, et de Sylvester. C'est ce dernier qui a utilisé le mot « matrice » pour la première fois, en 1850, pour désigner un tableau rectangulaire de nombres. La présentation du déterminant d'une matrice carrée d'ordre n comme forme n -linéaire alternée de ses n vecteurs colonnes est due à Weierstrass et Kronecker, à la fin du XIX^e siècle.

Les fondements de la théorie des matrices ont été posés au XIX^e siècle autour des sujets suivants : les déterminants pour la résolution de systèmes d'équations linéaires, la représentation des transformations linéaires et des formes quadratiques, sujet qui sera traité de façon détaillée dans le chapitre 3, les décompositions matricielles et la réduction sous forme canonique des matrices, c'est-à-dire des formes diagonales ou triangulaires par blocs, telles que la forme diagonale par blocs de Jordan (1838-1922),

introduite par Weierstrass, la forme triangulaire par blocs de Schur (1875-1941), ou encore la forme réduite de Frobenius, appelée aussi décomposition de Frobenius, qui est une matrice diagonale par blocs, dont les blocs sont des matrices compagons.

Un historique de la théorie des matrices au XIX^e siècle a été publié par Thomas Hawkins³, en 1974, mettant en exergue tout particulièrement les contributions du mathématicien britannique Arthur Cayley, vu par les historiens comme l'un des fondateurs de la théorie des matrices. Cayley a posé les fondements de la théorie classique des déterminants⁴, en 1843. Puis, il a développé le calcul matriciel⁵, en définissant certaines opérations comme le produit de deux matrices, la transposition du produit de deux matrices, et l'inversion d'une matrice 3×3 à l'aide des cofacteurs, et en établissant différentes propriétés des matrices dont le célèbre théorème de Cayley-Hamilton qui énonce que toute matrice carrée satisfait son équation caractéristique. Ce résultat mis en évidence à l'ordre 4 par William Rowan Hamilton (1805-1865), en 1853, pour le calcul de l'inverse d'un quaternion, a été énoncé dans le cas général par Cayley, en 1857, la démonstration pour un ordre quelconque étant due à Frobenius, en 1878.

Un volet important de la théorie des matrices porte sur la théorie spectrale, c'est-à-dire les notions de valeur propre et de polynôme caractéristique. Cette théorie, directement liée à l'intégration des systèmes d'équations différentielles linéaires, a pour origine des recherches en physique, et plus particulièrement en mécanique céleste pour l'étude des orbites des planètes, menées au XVIII^e siècle par des mathématiciens, physiciens et astronomes comme Lagrange et Laplace, puis au XIX^e siècle par Cauchy, Weierstrass, Kronecker et Jordan.

Les noms de certaines matrices, et des déterminants associés, sont ceux des mathématiciens qui les ont introduites. C'est le cas, par exemple, d'Alexandre Théophile Vandermonde (1735-1796) qui a donné son nom à une matrice dont les éléments de chaque ligne (ou de chaque colonne) forment une progression géométrique et dont le déterminant est un polynôme. C'est le cas aussi de Carl Jacobi (1804-1851) et de Ludwig Otto Hesse (1811-1874), pour les matrices jacobienne et hessienne, c'est-à-dire les matrices des dérivées partielles du premier ordre d'une fonction vectorielle de plusieurs variables, et du second ordre d'une fonction scalaire de plusieurs variables, dont les déterminants sont respectivement appelés jacobien et hessien. De même, pour la matrice laplacienne, ou matrice de Laplace, qui permet de représenter un graphe. On peut citer aussi Charles Hermite (1822-1901) pour les matrices hermitiennes, liées aux formes dites hermitiennes (voir section 3.15). Certaines matrices telles que les

3. Hawkins, T. (1974). The theory of matrices in the 19th century. *Proceedings of the International Congress of Mathematicians*, Vancouver.

4. Cayley, A. (1843). On a theory of determinants. *Cambridge Philosophical Soc. Tr.*, 8, 1-16.

5. Cayley, A. (1858). A memoir on the theory of matrices. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 148, 17-37.

matrices de Fourier (1768-1830) et de Hadamard (1865-1963) sont directement liées aux transformées du même nom.

D'autres, comme les matrices de Householder (1904-1993) et de Givens (1910-1993), sont respectivement associées à des transformations correspondant à une réflexion et une rotation. Ces transformations sont souvent utilisées pour le calcul de la décomposition QR d'une matrice pouvant intervenir dans l'algorithme des moindres carrés pour la détermination de la solution d'un système d'équations linéaires non carré. Dans le chapitre 2, nous présenterons le procédé d'orthonormalisation de Gram-Schmidt pour le calcul de la décomposition QR.

Des matrices dites structurées, comme les matrices de Hankel (1839-1873) et de Toeplitz (1881-1943), jouent aussi un rôle très important en traitement du signal. Pour ce type de matrice, il existe des algorithmes rapides d'inversion, comme cela sera illustré dans le chapitre 4, avec l'algorithme de Levinson-Durbin pour l'estimation des paramètres de modèles autorégressifs (AR) et de prédicteurs linéaires. D'autres matrices structurées comme les matrices de Frobenius, Sylvester, Vandermonde, Cauchy et Loewner sont aussi très utilisées en calcul numérique, en lien étroit avec le calcul polynomial, et des problèmes d'interpolation et d'approximation.

Les décompositions de matrices jouent un rôle important en analyse numérique, en particulier pour résoudre des systèmes d'équations à l'aide de la méthode des moindres carrés. C'est le cas, par exemple, des décompositions EVD (*eigenvalue decomposition*, en anglais, pour « décomposition propre »), SVD (*singular value decomposition*, pour « décomposition en valeurs singulières »), LU, QR, de Cholesky (1875-1918), de Schur (1875-1941), ou encore UD, qui seront présentées dans le volume 2.

De même que les matrices et le calcul matriciel jouent un rôle fondamental en algèbre linéaire, les tenseurs et le calcul tensoriel sont à l'origine de l'algèbre multilinéaire. C'est au XIX^e siècle qu'est née l'analyse tensorielle, appelée aussi calcul tensoriel, avec les travaux des mathématiciens allemands Georg Friedrich Bernhard Riemann⁶ (1826-1866) et Elwin Bruno Christoffel (1829-1900), en géométrie (non-euclidienne), introduisant la notation indicielle et les notions de métrique, de variété, de géodésique, d'espace courbe et de tenseur de courbure, qui ont donné naissance à ce qui est appelé aujourd'hui la géométrie riemannienne, et la géométrie différentielle.

C'est le mathématicien italien Gregorio Ricci-Curbastro (1853-1925) et son élève Tullio Levi-Civita (1873-1941) qui sont les fondateurs du calcul tensoriel, appelé alors

6. Une analyse détaillée des contributions de Riemann à l'analyse tensorielle a été faite par : Farwell, R., Knee, C. (1990). The missing link : Riemann's Commentatio, differential geometry and tensor analysis. *Historia Mathematica*, 17, 223-255.

calcul différentiel absolu⁷, avec l'introduction de la notion de composantes covariantes et contravariantes, qui a été utilisée par Albert Einstein (1879-1955) dans sa théorie de la relativité générale, en 1915.

Le calcul tensoriel est issu de l'étude de l'invariance de formes quadratiques sous l'effet d'un changement de coordonnées, et, de façon plus générale, de la théorie des invariants initiée par Cayley⁸, avec l'introduction de la notion d'hyperdéterminant qui généralise les déterminants matriciels aux hypermatrices. Consulter l'article de Crilly⁹ pour un survol des contributions de Cayley à la théorie des invariants. Cette théorie a ensuite été développée par Jordan et Kronecker, avec une controverse¹⁰ entre ces deux auteurs, puis poursuivie par David Hilbert (1862-1943), Elie Joseph Cartan (1869-1951) et Hermann Klaus Hugo Weyl (1885-1955), pour des formes algébriques (ou des polynômes homogènes), ou encore pour des tenseurs symétriques¹¹. Une revue historique de la théorie des invariants a été faite par Dieudonné et Carrell¹².

Cette propriété d'invariance vis-à-vis du système de coordonnées caractérise les lois de la physique et donc les modèles mathématiques de la physique. Ceci explique que le calcul tensoriel soit l'un des outils mathématiques fondamentaux pour l'écriture et l'étude des équations qui régissent les phénomènes physiques. C'est le cas par exemple en relativité générale, en mécanique des milieux continus, pour la théorie des déformations élastiques, en électromagnétisme, en thermodynamique, etc. Le mot tenseur a été introduit par le physicien allemand Woldemar Voigt (1850-1919), en 1899, pour la représentation géométrique des tensions (ou pressions) et des déformations dans un corps, dans les domaines de l'élasticité et de la cristallographie. À noter que le mot tenseur avait été introduit indépendamment par le mathématicien, physicien et astronome irlandais William Rowan Hamilton (1805-1865), en 1846, pour désigner le module d'un quaternion¹³.

7. Ricci, G., Levi Civita, T. (1900). Méthodes de calcul différentiel absolu et leurs applications. *Mathematische Annalen*, 54, 125-201.

8. Cayley, A. (1845). On the theory of linear transformations, *Cambridge Math. J.*, 4, 193-209.
Cayley, A. (1846). On linear transformations. *Cambridge and Dublin Math. J.*, 1, 104-122.

9. Crilly, T. (1986). The rise of Cayley's invariant theory (1841-1862), *Historica Mathematica*, 13, 241-254.

10. La controverse de 1874 entre Camille Jordan et Leopold Kronecker : Brechenmacher, F. (2008). Histoire du théorème de Jordan de la décomposition matricielle (1870-1930). *Revue d'histoire des Mathématiques*, 2(13), 187-257.

11. Olive, M., Kolev, B., Auffray, N. (2013). Espace de tenseurs et théorie classique des invariants. Dans 21^e Congrès Français de Mécanique, Bordeaux, France.

12. Dieudonné, J.A., Carrell, J.B. (1971). *Invariant theory, old and new*. Academic Press, Cambridge.

13. Sarrau, E. (1889). Notions sur la théorie des quaternions [En ligne]. Gauthiers-Villars, Paris, 9. Disponible à l'adresse : <http://rcin.org.pl/Content/13490>.

Comme nous venons de le voir dans ce bref survol historique, le calcul tensoriel a été utilisé initialement en géométrie et pour décrire des phénomènes physiques à l'aide de champs de tenseurs, le calcul tensoriel facilitant l'application d'opérateurs différentiels (gradient, divergence, rotationnel, laplacien) aux champs tensoriels¹⁴.

Ainsi, on définit le tenseur électromagnétique (ou tenseur de Maxwell (1831-1879)) décrivant la structure du champ électromagnétique, le tenseur des contraintes (ou tenseur de Cauchy) en mécanique des milieux continus, le tenseur de courbure d'ordre 4 (ou tenseur de Riemann-Christoffel), le tenseur de torsion d'ordre 3 (ou tenseur de Cartan)¹⁵ en géométrie différentielle, le tenseur des déformations d'ordre 2 (ou tenseur de Green-Lagrange), etc.

Après leur introduction en tant qu'outils de calcul et de représentation en physique et en géométrie, les tenseurs ont fait l'objet de développements mathématiques liés aux décompositions polyadiques (Hitchcock 1927) visant à généraliser les décompositions dyadiques, c'est-à-dire les décompositions matricielles telles que la SVD.

Puis sont apparues des applications pour l'analyse de données tridimensionnelles généralisant l'analyse matricielle à des ensembles de matrices, vus comme des tableaux de données caractérisées par trois indices. On peut citer ici les travaux de pionniers en analyse factorielle de Cattell¹⁶ et de Tucker¹⁷ en psychométrie

14. La notion de champ tensoriel est associée à des grandeurs physiques pouvant dépendre à la fois de coordonnées spatiales et du temps. Ces quantités géométriques variables définissent des fonctions différentiables sur un domaine de l'espace physique. Les champs tensoriels sont utilisés en géométrie différentielle, en géométrie algébrique, en relativité générale, et dans de nombreux autres domaines des mathématiques et de la physique. Le concept de champ tensoriel généralise celui de champ vectoriel.

15. Voir : Cartan, E. (1922). Sur une généralisation de la notion de courbure de Riemann et les espaces à torsion. *Comptes rendus de l'Académie des sciences*, 174, 593-595. Elie Joseph Cartan (1869-1951), mathématicien français qui fut l'élève de Jules Henri Poincaré (1854-1912) et de Charles Hermite (1822-1901), à l'École normale supérieure. Il a apporté des contributions majeures concernant la théorie des groupes de Lie, la géométrie différentielle, la géométrie riemannienne, les polynômes orthogonaux et les fonctions elliptiques. Il a découvert les spineurs, en 1913, dans le cadre de ses travaux sur les représentations des groupes. Comme le calcul tensoriel, le calcul spinoriel joue un rôle majeur en physique quantique. Son nom est associé à celui d'Albert Einstein (1879-1955) pour la théorie classique de la gravitation qui repose sur le modèle de la relativité générale.

16. Raymond Cattell (1905-1998), psychologue anglo-américain qui a utilisé l'analyse factorielle pour l'étude de la personnalité, avec des applications en psychothérapie.

17. Ledyard Tucker (1910-2004), mathématicien américain, spécialiste en statistiques et en psychologie, plus particulièrement connu pour la décomposition tensorielle qui porte son nom.

(Cattell 1944 ; Tucker 1966) et de Harshman¹⁸ en phonétique (Harshman 1970) qui ont introduit les décompositions de Tucker et PARAFAC (*parallel factors decomposition*). Cette dernière décomposition a été proposée indépendamment par (Carroll et Chang 1970), sous le nom de *canonical decomposition* (CANDECOMP), suite aux travaux de (Wold 1966), avec l'objectif de généraliser la décomposition de (Eckart et Young 1936), c'est-à-dire la SVD à des tableaux d'ordre supérieur à deux. Cette décomposition a ensuite été appelée CP (pour CANDECOMP/PARAFAC) par (Kiers 2000).

Pour un survol des méthodes tensorielles appliquées à l'analyse de données, consulter les livres de (Coppi et Bolasco 1989) et de (Kroonenberg 2008). À partir des années 1990, l'analyse tensorielle, appelée aussi analyse multivoie (*multi-way analysis*, en anglais), a connu un grand succès en chimie, et plus particulièrement en chimio-métrie (Bro 1997). Consulter, par exemple, le livre de (Smilde *et al.* 2004) pour une description de diverses applications en chimie.

En parallèle, dès la fin des années 1980, les tenseurs sont apparus naturellement comme « objets » statistiques, avec les moments et les cumulants d'ordre supérieur à deux (McCullagh 1987). Des applications ont alors vu le jour en traitement du signal pour résoudre le problème de séparation aveugle de sources à l'aide de cumulants (Cardoso 1990 et 1991 ; Cardoso et Comon 1990). Le livre de (Comon et Jutten 2010) dresse un panorama des différentes méthodes de séparation aveugle de sources.

Au début des années 2000, les tenseurs ont été utilisés pour la modélisation des systèmes de communication numérique (Sidiropoulos *et al.* 2000a), pour le traitement d'antenne (Sidiropoulos *et al.* 2000b), pour la récupération d'harmoniques multidimensionnelles (Sidiropoulos 2001 ; Jiang *et al.* 2001 ; Haardt *et al.* 2008), et pour le traitement d'images, plus particulièrement pour la reconnaissance de visages (Vasilescu et Terzopoulos 2002). Le domaine des télécommunications a donné naissance ensuite à de nombreux modèles tensoriels (de Almeida *et al.* 2008 ; Favier *et al.* 2012a ; de Almeida et Favier 2013 ; Favier et de Almeida 2014b ; Favier *et al.* 2016 ; da Costa *et al.* 2018). Ces modèles feront l'objet d'un chapitre dans le volume 3. Les tenseurs ont aussi été exploités pour la modélisation et l'estimation paramétrique de systèmes dynamiques tant linéaires (Fernandes *et al.* 2008 et 2009a) que non linéaires, comme les systèmes de Volterra (Favier et Bouilloc 2009a, 2009b et 2010), ou de Wiener-Hammerstein (Kibangou et Favier 2008, 2009 et 2010 ; Favier et Kibangou 2009a et 2009b ; Favier *et al.* 2012b), et pour la modélisation et l'estimation de canaux de communication non linéaires (Kibangou et Favier 2007 ; Fernandes *et al.* 2009b et 2011 ; Bouilloc et Favier 2012). Ces différentes applications des tenseurs au traitement du signal seront traitées dans le volume 4.

18. Richard Harshman (1943-2008), spécialiste en psychométrie et père de l'analyse tridimensionnelle PARAFAC, qui est la décomposition tensorielle la plus utilisée dans les applications.

De nombreuses applications des tenseurs concernent aussi le traitement de la parole (Nion *et al.* 2010), des signaux radar MIMO (Nion et Sidiropoulos 2010) et biomédicaux, en particulier les signaux d'électroencéphalographie (EEG) (De Vos *et al.* 2007 ; Cong *et al.* 2015 ; Hunyadi *et al.* 2016), et d'électrocardiographie (ECG) (Padhy *et al.* 2018), l'imagerie par résonance magnétique (IRM, ou MRI pour *magnetic resonance imaging*, en anglais) (Schultz *et al.* 2014), ou encore l'imagerie hyperspectrale (Bourennane *et al.* 2010 ; Velasco-Forero et Angulo 2013), parmi bien d'autres. Aujourd'hui, les tenseurs vus comme des tableaux multi-indices sont utilisés dans de multiples domaines d'application pour la représentation, la fouille, l'analyse, et la fusion de données multidimensionnelles et multimodales (Acar et Yener 2009 ; Morup 2011 ; Cichocki 2013 ; Lahat *et al.* 2015).

De très nombreux ouvrages traitent d'algèbre linéaire et de calcul matriciel, parmi lesquels on peut citer, par exemple : (Gantmacher 1959 ; Greub 1967 ; Bellman 1970 ; Strang 1980 ; Horn et Johnson 1985 et 1991 ; Lancaster et Tismenetsky 1985 ; Noble et Daniel 1988 ; Barnett 1990 ; Rotella et Borne 1995 ; Golub et Van Loan 1996 ; Lütkepohl 1996 ; Cullen 1997 ; Zhang 1999 ; Meyer 2000 ; Lascaux et Théodor 2000 ; Serre 2002 ; Bernstein 2005 ; Abadir et Magnus 2005 ; Gourdon 2009 ; Grifone 2011 ; Aubry 2012).

Pour l'algèbre multilinéaire et le calcul tensoriel, les ouvrages de référence sont beaucoup moins nombreux, comme par exemple : (Greub 1978 ; McCullagh 1987 ; Coppi et Bolasco 1989 ; Smilde *et al.* 2004 ; Kroonenberg 2008 ; Cichocki *et al.* 2009 ; Hackbusch 2012). Pour une introduction à l'algèbre multilinéaire et aux tenseurs, consulter les thèses de doctorat de de Lathauwer (1997) et de Bro (1998). On peut aussi consulter les articles de synthèse suivants : (Bro 1997 ; Kolda et Bader 2009 ; Lu *et al.* 2011 ; Comon 2014 ; Favier et de Almeida 2014a ; Cichocki *et al.* 2015 ; Papalexakis *et al.* 2016 ; Sidiropoulos *et al.* 2017).