

# Table des matières

<b>Introduction</b> . . . . .	<b>1</b>
<b>Chapitre 1. Ensemble de solides sans boucle ni branchement.</b> . . .	<b>3</b>
1.1. Identification d'une chaîne de solides sans boucle ni branchement . . .	3
1.2. Application des principes fondamentaux de la mécanique . . . . .	4
1.2.1. Principe des générateurs d'efforts . . . . .	4
1.2.2. Principe des récepteurs d'efforts . . . . .	5
1.2.3. Application du principe fondamental de la dynamique . . . . .	6
1.2.3.1. Application du principe fondamental au solide 1 . . . . .	6
1.2.3.2. Application du principe fondamental au solide 2 . . . . .	7
1.2.3.3. Principe fondamental appliqué à l'ensemble (D) . . . . .	7
1.2.4. Théorème des actions mutuelles . . . . .	8
1.2.5. Bilan des équations obtenues . . . . .	9
1.3. Étude du mouvement d'une chaîne de solides : cas de trois solides. . .	9
1.3.1. Application du principe fondamental de la dynamique . . . . .	9
1.3.2. Paramètres solidifiants . . . . .	10
1.3.3. Équations du mouvement . . . . .	12
1.3.3.1. Premier jeu d'équations . . . . .	12
1.3.3.2. Deuxième jeu d'équations . . . . .	14
1.3.3.3. Troisième jeu d'équations. . . . .	16
1.3.4. Détermination des inconnues de liaisons . . . . .	18
1.4. Liaisons entre solides . . . . .	18
1.4.1. Liaison associée au contact ponctuel de deux solides . . . . .	18
1.4.1.1. Configuration 1 . . . . .	21
1.4.1.2. Configuration 2 . . . . .	21
1.4.1.3. Configuration 3 . . . . .	22

1.4.1.4. Liaisons parfaites . . . . .	23
1.4.2. Torseur de liaison associé au contact linéique de deux solides . . . . .	24
1.4.2.1. Contact linéique quelconque . . . . .	24
1.4.2.2. Contact linéique rectiligne . . . . .	25
1.4.3. Torseur de liaison associé au contact surfacique de deux solides . . . . .	27
1.4.3.1. Contact surfacique quelconque . . . . .	27
1.4.3.2. Contact surfacique plan . . . . .	28
1.4.4. Liaisons fondamentales entre deux solides en contact . . . . .	30
1.4.4.1. Liaison rotoïde (pivot) d'axe $(Q \vec{z})$ . . . . .	30
1.4.4.2. Liaison glissière d'axe $(Q \vec{z})$ . . . . .	30
1.4.4.3. Liaison verrou (pivot-glissant) d'axe $(Q \vec{z})$ . . . . .	31
1.4.4.4. Liaison hélicoïdale d'axe $(Q \vec{z})$ . . . . .	31
1.4.4.5. Liaison rotule du centre $Q$ . . . . .	32
1.4.4.6. Liaison plan sur plan avec le plan $\Pi(Q \vec{x},\vec{y})$ . . . . .	32

## Chapitre 2. Mécanique vibratoire des systèmes de solides . . . . . 33

2.1. Équations du mouvement d'un système de solides . . . . .	33
2.1.1. Configuration et repérage d'un système de solides dans un galiléen . . . . .	33
2.1.2. Distributeurs des vitesses de $n$ solides . . . . .	34
2.1.3. Torseurs associés aux charges et aux efforts . . . . .	35
2.1.4. Équation générale de la dynamique issue du principe fondamental . . . . .	36
2.1.5. Application de la mécanique analytique du mouvement . . . . .	37
2.1.5.1. Équations de Lagrange pour chaque solide . . . . .	37
2.1.5.2. Équations de Lagrange pour l'ensemble $(\mathcal{D})$ . . . . .	37
2.1.5.3. Équations subsidiaires de l'énergie-puissance . . . . .	39
2.2. Systèmes oscillatoires linéaires à $n$ solides . . . . .	39
2.2.1. Mise en équation du problème . . . . .	39
2.2.2. Équilibre du système de $n$ solides . . . . .	43
2.2.3. Oscillations du système de $n$ solides . . . . .	43
2.2.4. Modes propres de vibration d'un système de $n$ solides . . . . .	44
2.2.5. Influence des conditions initiales du problème . . . . .	49
2.3. Étude des vibrations d'un ensemble continu par passage à la limite . . . . .	50
2.3.1. Prise en compte des conditions limites à tout instant . . . . .	55
2.4. Exercices . . . . .	57
2.4.1. Exercice 1 : équations du mouvement – Équilibre . . . . .	57
2.4.1.1. Première partie : cinématique . . . . .	59

2.4.1.2. Deuxième partie : dynamique . . . . .	59
2.4.1.3. Troisième partie : dynamique d'un ensemble de deux solides . . . . .	60
2.4.2. Solution de l'exercice 1 . . . . .	61
2.4.2.1. Première partie : cinématique . . . . .	61
2.4.2.2. Deuxième partie : dynamique . . . . .	63
2.4.2.3. Troisième partie : dynamique d'un ensemble de deux solides . . . . .	66
2.4.3. Exercice 2 : mouvement autour d'une position d'équilibre . . . . .	69
2.4.4. Questions et solutions de l'exercice 2 . . . . .	71
2.4.4.1. Question 1 . . . . .	71
2.4.4.2. Question 2 . . . . .	72
2.4.4.3. Question 3 . . . . .	73
2.4.4.4. Question 4 . . . . .	73
2.4.4.5. Question 5 . . . . .	74
2.4.4.6. Question 6 . . . . .	75
2.4.4.7. Question 7 . . . . .	75
2.4.4.8. Question 8 . . . . .	77
2.4.5. Exercice 3 : dynamique d'un robot RTT (une rotation + deux translations) . . . . .	78
2.4.5.1. Question préliminaire . . . . .	81
2.4.5.2. Questions . . . . .	81
2.4.6. Solutions de l'exercice 3 . . . . .	82
2.4.6.1. Question préliminaire . . . . .	82
2.4.6.2. Questions . . . . .	82
<b>Chapitre 3. Vibrations à <math>N</math> degrés de liberté . . . . .</b>	<b>89</b>
3.1. Introduction . . . . .	89
3.2. Système homogène – Vibrations libres ( $f_1 = f_2 = 0$ ) . . . . .	91
3.2.1. Sans amortissement ( $c_{ij} = 0$ ) . . . . .	91
3.2.2. Résolution du système ( $\Sigma$ ) . . . . .	92
3.2.2.1. Système à deux dd $\ell$ . . . . .	93
3.2.2.2. Propriété d'un système à Ndd $\ell$ . . . . .	94
3.2.3. Système libre amorti . . . . .	100
3.2.3.1. Amortissement modal . . . . .	100
3.2.3.2. Amortissement proportionnel . . . . .	101
3.3. Réponse temporelle d'un système excité . . . . .	103
3.4. Exercices . . . . .	105

3.4.1. Exercice 1 : modes propres d'un système à deux degrés de liberté . . . . .	105
3.4.2. Solution de l'exercice 1 . . . . .	107
3.4.3. Exercice 2 : oscillations libres et forcées d'un système à deux $dd\ell$ conservatif . . . . .	109
3.4.4. Solution de l'exercice 2 . . . . .	111
3.4.5. Exercice 3 : corrélation calcul-essai . . . . .	116
3.4.6. Solution de l'exercice 3 . . . . .	117
3.4.7. Exercice 4 : système amorti avec un seul mode excité . . . . .	119
3.4.8. Solution de l'exercice 4 . . . . .	120
3.4.9. Exercice 5 : système excité par la base . . . . .	128
3.4.10. Solution de l'exercice 5. . . . .	129
<b>Chapitre 4. Analyse modale de <math>N</math> degrés de liberté. . . . .</b>	<b>137</b>
4.1. Introduction. . . . .	137
4.2. Modes normaux . . . . .	137
4.3. Réponse dans le domaine fréquentiel d'une structure conservative soumise à une excitation harmonique . . . . .	138
4.4. Réponse d'une structure avec amortissement visqueux proportionnel à une excitation harmonique . . . . .	142
4.5. Réponse fréquentielle d'une structure avec amortissement hystérétique proportionnel. . . . .	145
4.6. Exercices . . . . .	146
4.6.1. Exercice 1 : matrice de réceptance d'une structure conservative . . . . .	146
4.6.1.1. Première partie . . . . .	147
4.6.1.2. Deuxième partie . . . . .	148
4.6.2. Solution de l'exercice 1 . . . . .	148
4.6.2.1. Première partie . . . . .	148
4.6.2.2. Deuxième partie . . . . .	153
4.6.3. Exercice 2 : matrice de réceptance d'une structure avec amortissement visqueux proportionnel . . . . .	157
4.6.4. Solution de l'exercice 2 . . . . .	158
4.6.5. Exercice 3 : cas d'une matrice de masse non diagonale . . . . .	163
4.6.6. Solution de l'exercice 3 . . . . .	164
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>169</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>171</b>

---

<b>Sommaire d'Équations du mouvement 1.</b> . . . . .	173
<b>Sommaire d'Équations du mouvement 2.</b> . . . . .	175
<b>Sommaire d'Équations du mouvement 3.</b> . . . . .	179
<b>Sommaire d'Équations du mouvement 4.</b> . . . . .	181