

## Avant-propos

Cet ouvrage introduit un modèle de représentation géométrique pour décrire et manipuler des formes complexes non standards comme les surfaces rugueuses ou les volumes poreux. Il s'adresse aux étudiants en formation scientifique (mathématiciens, informaticiens, physiciens, etc.), aux ingénieurs, aux chercheurs ou à toute personne familiarisée avec les notions mathématiques abordées en début de cycle supérieur. Mais de nombreuses parties sont accessibles à tous, notamment toutes les sections introductives présentant les idées à l'aide d'exemples. Les personnes non averties, qu'elles soient artistes, designers, ou simplement curieuses, pourront y comprendre la philosophie de notre démarche, et découvriront un nouvel univers de formes insoupçonné et passionnant.

Les modèles de représentation géométrique sont des outils mathématiques intégrés dans les logiciels de conception géométrique assistée par ordinateur (C.G.A.O.). Ils permettent de produire des représentations numériques des formes. À l'aide d'interfaces graphiques ou d'outils de programmation, l'utilisateur peut dessiner et/ou manipuler ces formes. Il peut également tester ou évaluer leurs propriétés physiques (mécanique, électro-magnétique, acoustique, etc.) en communiquant les descriptions géométriques à d'autres logiciels de simulation numériques spécifiques.

Le modèle de représentation géométrique que nous exposons est basé sur le paradigme de la géométrie fractale. Le fondement de cette dernière est d'étudier les « propriétés » (signal, géométrie, phénomènes, etc.) à différents niveaux d'échelles et d'en identifier les invariants. Les objets sont décrits par auto-référence entre deux niveaux d'échelle : chacun des détails de l'objet (c'est-à-dire le niveau d'échelle inférieur) est décrit par référence à l'objet lui-même (c'est-à-dire le niveau d'échelle supérieur). Cette approche n'est pas conventionnelle et est souvent déroutante au premier abord. Mais, très vite nous percevons sa richesse et sa puissance. L'univers de formes qu'il est possible de créer est infini et n'est encore que partiellement exploré.

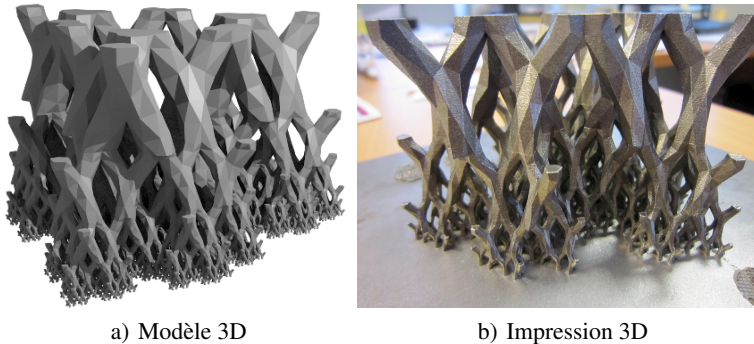
Dans cet ouvrage, nous présentons les fondements mathématiques, afin que le lecteur puisse disposer de toutes les informations pour comprendre, tester et exploiter ce modèle. Les propriétés, théorèmes et méthodes de construction sont complétés d’algorithmes et de nombreux exemples et illustrations. Pour la formalisation, nous avons fait le choix d’utiliser des notations mathématiques précises et rigoureuses afin de lever toute ambiguïté et rendre plus facile la compréhension.

Le lecteur ne souhaitant pas se préoccuper du formalisme mathématique peut comprendre la philosophie de notre démarche, en se focalisant sur les sections présentes en début de chapitre, dans lesquelles les idées et les principes sont présentés intuitivement à partir d’exemples.

Cet ouvrage est le résultat de vingt cinq ans de recherches menées principalement dans les laboratoires LIRIS de l’université Lyon I et LIB de l’université de Bourgogne Franche Comté. Ces recherches ont été initiées par Eric Tosan qui a été à l’origine du fondement de ce formalisme et à qui nous dédions cet ouvrage.

## I.1. Les fractales pour l'industrie : pourquoi ?

Cet ouvrage montre nos premiers pas vers les aspects fondamentaux et appliqués de la modélisation géométrique. Ce domaine de recherche traite de l'acquisition, de l'analyse et de l'optimisation des représentations numériques d'objets 3D.



**Figure I.1.** *Arbre 3D construit par la modélisation itérative (source : projet MODITERE n° ANR-09-COSI-014)*

La figure I.1 montre un exemple de structure qui admet des charges verticales élevées, tout en minimisant le transfert de chaleur entre le haut et le bas de la pièce. La fabrication additive (impression 3D) permet pour la première fois de créer des objets aussi complexes, même en métal (ici avec une imprimante laser haut de gamme EOS M270). Ce type de technologie aura un impact sociétal et économique élevé, permettant de créer de meilleurs systèmes (moteurs, voitures, avions, etc.), conçus et adaptés numériquement pour une fonctionnalité optimale, consommant ainsi moins de matière première pour leur fabrication et d'énergie lorsqu'ils sont utilisés.

Cependant, la conception assistée par ordinateur actuelle n'est pas bien adaptée à la génération de tels types d'objets. Pendant des siècles, pendant des millénaires, l'humanité a produit des biens avec des haches, des limes (ou autres outils tranchants ou de rabotage), en enlevant des pièces d'un morceau de bois ou de plastique. Par la suite, les outils ont évolué vers des machines complexes de type fraiseuses numériques. Mais à aucun moment, pour ces processus de fabrication, nous n'avons eu besoin d'arrêts brusques ou de changements de direction permanents de l'outil de coupe. Les trajectoires sont toujours « régulières », d'où le développement de mathématiques spécifiques à ces problématiques et notre excellente connaissance de la modélisation d'objets lisses. C'est pourquoi il a fallu attendre le XX<sup>e</sup> siècle pour avoir les connaissances mathématiques nécessaires à la modélisation de surfaces rugueuses ou de structures poreuses : nous ne pouvions tout simplement pas les produire avant.

Ainsi, depuis le développement des ordinateurs dans les années 1950, les logiciels de conception géométrique assistée par ordinateur (C.G.A.O. ou C.A.O.) ont été développés pour représenter des formes géométriques destinées à être fabriquées par des procédés de fabrication standard. Ces procédés sont :

- la fabrication soustractive à l'aide de machines-outils telles que les tours ou les fraiseuses ;
- le moulage, les moules étant eux-mêmes fabriqués à l'aide de machines-outils ;
- la fabrication par déformation : l'estampage ou matricage (mais là encore les matrices sont fabriquées généralement à l'aide de machines-outils), le pliage, etc. ;
- le découpage, etc.

Chacun de ces procédés impose des contraintes, par exemple pour des questions d'encombrement de la fraise (même une fraiseuse cinq axe ne peut pas produire n'importe quelle géométrie). Ces procédés de fabrication ont fatalement influencé la façon de concevoir les géométries des objets pour pouvoir effectivement les fabriquer. Ainsi, les logiciels de C.A.O. ont intégré ces méthodologies de conception en développant des modèles ou des outils numériques adaptés. Actuellement, la plupart des logiciels de C.A.O. sont basés sur la représentation des formes par les surfaces définissant leurs bords. Et ces surfaces sont généralement décrites à l'aide d'une représentation paramétrique appelée NURBS (*Non-Uniform Rational B-Spline*). Ces modèles de surface sont très puissants et très pratiques. Il est possible de représenter toutes les coniques (cylindres, cônes, sphères, etc.) et des formes complexes comme des carrosseries de voitures ou des ailes d'avion. Ils ont d'ailleurs initialement été conçus pour cela.

Mais l'apparition des techniques de fabrication additive a opéré un bouleversement dans ce domaine, en ouvrant la possibilité des formes potentiellement « fabricables ». La contrainte de l'encombrement de l'outil étant levée, il devient alors possible de produire des formes très complexes, présentant des lacunes ou de la porosité. Ces

nouvelles techniques ont remis en cause la façon de concevoir la géométrie des objets. De nouveaux types d'objets, tels que des objets à structure poreuse ou à surface rugueuse, peuvent présenter de nombreux avantages en raison de leurs propriétés physiques spécifiques. Les structures « fractales » sont utilisées dans de nombreux domaines tels que l'architecture [RIA 14], la bijouterie [SOO 06], le transport de chaleur et de masse [PEN 10], les antennes [PUE 96, COH 97], ou l'absorption acoustique [SAP 97].

## I.2. Les fractales pour l'industrie : comment ?

L'émergence de techniques telles que les imprimantes 3D permet de nouvelles possibilités qui ne sont pas encore exploitées, voire inexplorées. Différents modèles et algorithmes mathématiques ont été développés pour générer des fractales. Nous pouvons les classer en trois familles :

- la première regroupe les algorithmes de calcul des bassins d'attraction d'une fonction donnée. Les ensembles de Julia et de Mandelbrot [PEI 86] ou Mandelbulb [ARO 09] en sont quelques exemples ;
- la seconde est basée sur la simulation de phénomènes tels que la percolation ou la diffusion [FAL 90] ;
- la dernière correspond à des algorithmes ou modèles déterministes ou probabilistes, basés sur la propriété d'autosimilarité associée aux fractales comme le générateur de terrain [ZHO 07], *Iterated Function System* [BAR 08], *L-System* [PRU 90b].

Dans cette dernière famille de méthodes, les formes sont générées à partir de règles de réécriture permettant de contrôler la géométrie. Néanmoins, la plupart de ces modèles ont été développés pour la synthèse d'images, sans considération de « fabricabilité » ou ont été développés pour des applications très spécifiques comme la modélisation du bois [TER 09]. Certaines études abordent cet aspect pour des applications spécifiques aux imprimantes 3D [SOO 06]. Dans [BAR 13b], Barnsley définit les homéomorphismes fractals de  $[0, 1]^2$  sur l'espace de modélisation  $[0, 1]^2$ . La même approche est utilisée en 3D pour construire des fractales 3D. Un objet standard 3D est intégré dans  $[0, 1]^3$  puis transformé en objet fractal 3D. Cette approche préserve la topologie de l'objet initial qui est un point important pour la « fabricabilité ».

La principale difficulté liée aux méthodes traditionnelles de génération de fractales est le contrôle des formes. Par exemple, il est difficile d'obtenir la forme désirée en utilisant le système d'homéomorphismes fractals proposé par Barnsley. Nous élaborons ici un système de modélisation d'un nouveau type, en s'appuyant sur les principes des logiciels de C.A.O. existants, tout en étendant leurs capacités et leurs domaines d'application. Ce nouveau système de modélisation offre aux concepteurs (ingénieurs dans

l'industrie) et aux créateurs (plasticiens, stylistes, designers, architectes, etc.) de nouvelles opportunités pour concevoir et produire rapidement une maquette, un prototype ou un objet unique. Notre approche consiste à étendre les possibilités d'un système de C.A.O. standard en incluant des formes fractales, tout en préservant la facilité d'utilisation pour les utilisateurs finaux.

Nous proposons un formalisme basé sur les systèmes itérés de fonctions (IFS) standards enrichis par le concept de représentation par les bords (B-Rep). Cela permet de dissocier la topologie des formes finales de la texture géométrique, ce qui simplifie grandement le processus de conception. Cette approche est puissante, elle généralise les courbes de subdivision et les surfaces standards (linéaires, stationnaires), ce qui permet un contrôle supplémentaire. Par exemple, nous avons pu proposer une méthode pour raccorder une surface de subdivision de schéma primal avec une surface de subdivision de schéma dual [POD 14], un sujet difficile pour l'approche par subdivision standard.

Le premier chapitre, rappelle la notion d'autosimilarité, intimement liée à celle de fractale. Nous présentons les systèmes itérés de fonctions (IFS), formalisant cette propriété d'autosimilarité. Puis, nous introduisons les enrichissements de ce modèle : systèmes itérés de fonctions contrôlés (C-IFS) et systèmes itérés de fonctions contrôlés par les bords (BC-IFS). Le deuxième chapitre est consacré aux exemples. Il permet d'avoir un aperçu des possibilités de description et de modélisation des BC-IFS mais également de mieux comprendre par l'exemple le principe du modèle. Le troisième chapitre présente le lien entre les BC-IFS et le modèle surfacique que sont les NURBS et les surfaces de subdivision. Les résultats présentés dans ce chapitre sont importants car ils montrent que ces modèles surfaciques sont des cas particuliers des BC-IFS. Cela permet de les manipuler avec un même formalisme et de les faire interagir en construisant, par exemple, des jonctions entre deux surfaces de natures quelconques. Dans le quatrième chapitre, nous exposons des outils d'aide à la conception, facilitant la démarche de description, ainsi que des exemples d'application de conception de volumes poreux et de surfaces rugueuses.