

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
Abdenacer MAKHLOUF	
<b>Chapitre 1. Contexte algébrique pour les méthodes numériques, la théorie du contrôle et la renormalisation</b> . . . . .	3
Dominique MANCHON	
1.1. Introduction . . . . .	3
1.2. Algèbres de Hopf : propriétés générales . . . . .	4
1.2.1. Algèbres . . . . .	4
1.2.2. Cogèbres . . . . .	6
1.2.3. Produit de convolution . . . . .	9
1.2.4. Bigèbres et algèbres de Hopf . . . . .	9
1.2.5. Quelques exemples simples d'algèbres de Hopf . . . . .	10
1.2.6. Propriétés de base des algèbres de Hopf . . . . .	12
1.3. Algèbres de Hopf connexes . . . . .	13
1.3.1. Bigèbres connexes . . . . .	13
1.3.2. Un exemple : l'algèbre de Hopf des arbres enracinés décorés . . .	16
1.3.3. Bigèbres connexes filtrées . . . . .	17
1.3.4. Produit de convolution . . . . .	18
1.3.5. Caractères . . . . .	21
1.3.6. Schémas en groupes et théorème de Cartier-Milnor-Moore-Quillen . . . . .	23
1.3.7. Renormalisation dans les algèbres de Hopf filtrées connexes . . .	25
1.4. Algèbres pré-Lie : groupe des flots formels et théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt . . . . .	28

1.4.1. Définition et propriétés générales . . . . .	29
1.4.2. Le groupe des flots formels . . . . .	29
1.4.3. Le théorème de Poincaré-Birkhoff-Witt pré-Lie . . . . .	31
1.5. Opérides algébriques . . . . .	33
1.5.1. Manipulation des opérations algébriques . . . . .	33
1.5.2. Opéride des opérations multilinéaires . . . . .	34
1.5.3. Une définition pour les opérides linéaires . . . . .	35
1.5.4. Quelques exemples d'opérides . . . . .	37
1.6. Algèbres pré-Lie : relation avec les opérides, algèbres pré-Lie libres et séries de Butcher . . . . .	40
1.6.1. Algèbres pré-Lie et opérides augmentées . . . . .	40
1.6.2. Une approche directe de l'algèbre pré-Lie libre . . . . .	41
1.6.3. Algèbres de Hopf commutatives droitières et théorème de Loday-Ronco . . . . .	43
1.6.4. Algèbres pré-Lie de champs de vecteurs . . . . .	45
1.6.5. B-séries, composition et substitution . . . . .	48
1.7. Autres structures algébriques apparentées . . . . .	50
1.7.1. Algèbres NAP . . . . .	50
1.7.2. Algèbres de Novikov . . . . .	53
1.7.3. Algèbres assosymétriques . . . . .	54
1.7.4. Algèbres dendrifformes . . . . .	54
1.7.5. Algèbres post-Lie . . . . .	55
1.8. Bibliographie . . . . .	56

## Chapitre 2. Des intégrales itérées et du calcul chronologique aux algèbres de Hopf et de Rota-Baxter . . . . .

59

Kurusch EBRAHIMI-FARD et Frédéric PATRAS

2.1. Introduction . . . . .	59
2.2. Intégrales itérées généralisées . . . . .	63
2.2.1. Permutations et simplexes . . . . .	64
2.2.2. Descentes, NCSF et formule de Baker-Campbell-Hausdorff . . . . .	69
2.2.3. Arbres enracinés et équations différentielles non linéaires . . . . .	72
2.2.4. Flots et structures d'algèbre de Hopf . . . . .	76
2.3. Avancées en calcul chronologique . . . . .	79
2.3.1. Calcul chronologique et demi-mélanges . . . . .	81
2.3.2. Calcul chronologique et produits pré-Lie . . . . .	85
2.3.3. Produits ordonnés en temps et algèbres enveloppantes . . . . .	87
2.3.4. Flots formels et structures d'algèbres de Hopf . . . . .	89
2.4. Algèbres de Rota-Baxter . . . . .	93
2.4.1. Origine . . . . .	94
2.4.2. Définition et exemples . . . . .	98
2.4.3. Structures algébriques connexes . . . . .	102

2.4.4. Factorisation d'Atkinson et récursion de Bogoliubov . . . . .	109
2.4.5. Identité de Spitzer : cas commutatif . . . . .	111
2.4.6. Algèbres de Rota-Baxter commutatives libres . . . . .	115
2.4.7. Identité de Spitzer : cas non commutatif . . . . .	117
2.4.8. Algèbres de Rota-Baxter libres . . . . .	120
2.5. Bibliographie . . . . .	122

### **Chapitre 3. Fonctions symétriques non commutatives, séries de Lie et algèbres de descentes . . . . .**

129

Jean-Yves THIBON

3.1. Introduction . . . . .	129
3.2. Fonctions symétriques classiques . . . . .	130
3.2.1. Polynômes symétriques . . . . .	130
3.2.2. Algèbre de Hopf des fonctions symétriques . . . . .	133
3.2.3. Notation des $\lambda$ -anneaux . . . . .	135
3.2.4. Fonctions symétriques et séries formelles . . . . .	135
3.2.5. Dualité . . . . .	137
3.3. Fonctions symétriques non commutatives . . . . .	140
3.3.1. Définitions de base . . . . .	140
3.3.2. Générateurs et bases linéaires . . . . .	142
3.3.3. Dualité . . . . .	145
3.3.4. Algèbres de descentes de Solomon . . . . .	148
3.4. Séries de Lie et idempotents de Lie . . . . .	150
3.4.1. Opérateurs de permutation sur les espaces tensoriels . . . . .	150
3.4.2. La série de Hausdorff . . . . .	151
3.4.3. Idempotents de Lie dans les algèbres de descentes . . . . .	155
3.5. Idempotents de Lie comme fonctions symétriques non commutatives . . . . .	156
3.5.1. Sommes de puissances non commutatives . . . . .	156
3.5.2. Le développement de Magnus . . . . .	158
3.5.3. Le développement BCH continu . . . . .	160
3.5.4. Une preuve supplémentaire du développement de Magnus . . . . .	162
3.5.5. La transformation en $(1 - q)$ . . . . .	163
3.5.6. Les algèbres de Hopf entrent en scène . . . . .	164
3.5.7. Une famille d'idempotents de Lie à un paramètre . . . . .	165
3.5.8. Les $q$ -crochets itérés et leur diagonalisation . . . . .	165
3.6. Décompositions des algèbres de descentes . . . . .	168
3.6.1. Familles complètes d'idempotents orthogonaux minimaux . . . . .	168
3.6.2. Idempotents eulériens . . . . .	169
3.6.3. Idempotents eulériens généralisés . . . . .	173
3.7. Décompositions de l'algèbre tensorielle . . . . .	173
3.8. Déformations générales . . . . .	175
3.9. Quasi-idempotents de Lie comme polynômes de Lie . . . . .	176

3.9.1. La dérivée à gauche . . . . .	176
3.9.2. Polynômes de Lie multilinéaires . . . . .	177
3.9.3. Décompositions sur d'autres bases . . . . .	180
3.10. Permutations et fonctions quasi symétriques libres . . . . .	182
3.11. Mots tassés et fonctions quasi symétriques de mots . . . . .	184
3.12. Bibliographie . . . . .	188

## **Chapitre 4. Des méthodes de Runge-Kutta aux algèbres de Hopf d'arbres enracinés . . . . . 193**

Ander MURUA

4.1. Méthodes d'intégration numérique pour les équations différentielles ordinaires . . . . .	193
4.1.1. Introduction . . . . .	193
4.1.2. Méthodes de Runge-Kutta . . . . .	195
4.2. Théorie algébrique des méthodes de Runge-Kutta . . . . .	197
4.2.1. Conditions d'ordre des méthodes RK . . . . .	197
4.2.2. Indépendance des conditions d'ordre . . . . .	201
4.2.3. Preuve des conditions d'ordre nécessaires et suffisantes . . . . .	203
4.2.4. Composition des méthodes RK, arbres enracinés et forêts . . . . .	206
4.2.5. Groupe de Butcher . . . . .	210
4.2.6. Classes d'équivalence des méthodes RK . . . . .	212
4.2.7. Commentaires bibliographiques . . . . .	212
4.3. B-séries et développements formels connexes . . . . .	213
4.3.1. B-séries . . . . .	213
4.3.2. Analyse de l'erreur arrière, exponentielle et logarithme . . . . .	214
4.3.3. Séries d'opérateurs différentiels linéaires . . . . .	218
4.3.4. Algèbre de Lie du groupe de Butcher . . . . .	221
4.3.5. Structure d'algèbre pré-Lie sur $\mathfrak{g}$ . . . . .	222
4.3.6. Commentaires bibliographiques . . . . .	224
4.4. Algèbres de Hopf des arbres enracinés . . . . .	225
4.4.1. L'algèbre de Hopf commutative des arbres enracinés . . . . .	226
4.4.2. L'algèbre duale $\mathcal{H}^*$ et l'algèbre de Hopf duale $\mathcal{H}^\circ$ . . . . .	227
4.4.3. Les B-séries et les séries d'opérateurs différentiels revisités . . . . .	229
4.4.4. Une propriété universelle de l'algèbre de Hopf commutative des arbres enracinés . . . . .	231
4.4.5. Loi de substitution . . . . .	232
4.4.6. Commentaires bibliographiques . . . . .	233
4.5. Bibliographie . . . . .	233

## **Chapitre 5. Algèbre combinatoire dans la contrôlabilité et le contrôle optimal . . . . . 237**

Matthias KAWSKI

5.1. Introduction . . . . .	238
5.1.1. Motivation : exemples idéalisés . . . . .	239
5.1.2. Systèmes dynamiques contrôlés . . . . .	241
5.1.3. Questions fondamentales du contrôle . . . . .	242
5.2. Fondements analytiques . . . . .	244
5.2.1. Modèles d'espace-état et champs de vecteurs sur variétés . . . . .	245
5.2.2. Calcul chronologique . . . . .	246
5.2.3. Contrôles constants par morceaux et formule de Baker-Campbell-Hausdorff . . . . .	250
5.2.4. Itération de Picard et solutions de séries formelles . . . . .	252
5.2.5. Séries de Chen-Fliess et abstractions . . . . .	254
5.3. Contrôlabilité et optimalité . . . . .	258
5.3.1. Ensembles atteignables et accessibilité . . . . .	259
5.3.2. Contrôlabilité locale en temps petit . . . . .	261
5.3.3. Systèmes d'approximation nilpotents . . . . .	265
5.3.4. Optimalité et principe du maximum . . . . .	270
5.3.5. Variations du contrôle et cônes d'approximation . . . . .	274
5.4. Développements de produits et réalisations . . . . .	281
5.4.1. Variation des paramètres et produits exponentiels . . . . .	282
5.4.2. Calculs utilisant les produits de Zinbiel . . . . .	287
5.4.3. Produits exponentiels et formes normales pour les systèmes nilpotents . . . . .	289
5.4.4. Logarithme de la série de Chen . . . . .	293
5.5. Bibliographie . . . . .	299

## **Chapitre 6. L'algèbre est géométrie est algèbre : interactions entre les algèbres de Hopf, la géométrie de dimension infinie et application . . . . . 307**

Alexander SCHMEDING

6.1. Groupe de Butcher et algèbre de Connes-Kreimer . . . . .	308
6.1.1. Le groupe de Butcher et la B-série de l'analyse numérique . . . . .	308
6.1.2. Au-delà du groupe de Butcher . . . . .	311
6.2. Groupes des caractères des algèbres de Hopf graduées et connexes . . . . .	313
6.2.1. L'exponentielle et le logarithme . . . . .	314
6.3. Groupes des caractères contrôlés . . . . .	318
6.3.1. Conventions pour cette section . . . . .	318
6.3.2. Algèbres de Hopf combinatoires et caractère factoriel inverse . . . . .	326

6.4. Annexe : calcul dans les espaces localement convexes . . . . .	327
6.4.1. $C^r$ -variétés et $C^r$ -applications entre elles . . . . .	328
6.5. Bibliographie . . . . .	328
<b>Liste des auteurs . . . . .</b>	<b>331</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>333</b>
<b>Sommaire de <i>Algèbre et applications 1</i> . . . . .</b>	<b>337</b>