

Table des matières

Avant-propos	1
Liste des notations	5
Chapitre 1. Calcul différentiel	17
1.1. Introduction	17
1.2. Calcul différentiel de Fréchet	18
1.2.1. Conventions générales	18
1.2.2. Différentielle de Fréchet	21
1.2.3. Applications de classe C^p	25
1.2.4. Formules de Taylor	28
1.2.5. Fonctions analytiques	32
1.2.6. Théorème des fonctions implicites et ses conséquences	35
1.3. Autres approches du calcul différentiel	43
1.3.1. Variations de Lagrange et différentielle de Gateaux	43
1.3.2. Calcul des variations : notions élémentaires	45
1.3.3. Différentielles « commodes »	49
1.4. Partitions lisses de l'unité	52
1.4.1. Paracompacité C^∞ des espaces de Banach	52
1.4.2. Paracompacité c^∞	53
1.5. Équations différentielles ordinaires	54
1.5.1. Théorèmes d'existence et d'unicité d'une solution	54
1.5.2. Équations différentielles linéaires	60
1.5.3. Dépendance de la solution par rapport à un paramètre	62
Chapitre 2. Variétés différentielles et analytiques	67
2.1. Introduction	67
2.2. Variétés – Espace tangent en un point d'une variété	69

2.2.1. Notion de variété	69
2.2.2. Morphismes de variétés	74
2.2.3. Applications tangentes	76
2.2.4. Vecteurs tangents	77
2.3. Application linéaire tangente – Sous-variétés	83
2.3.1. Application linéaire tangente – Rang	83
2.3.2. Différentielle	85
2.3.3. Sous-variétés	86
2.3.4. Immersions et plongements	87
2.3.5. Submersions, subimmersions et étalements	90
2.3.6. Sous-variétés de \mathbb{K}^n	93
2.3.7. Produit de variétés	94
2.3.8. Morphismes et variétés transversaux	95
2.3.9. Produit fibré de variétés	97
2.3.10. Covecteurs et espace cotangents	98
2.3.11. Application linéaire cotangente	99
2.4. Groupes de Lie et leurs actions	100
2.4.1. Groupes de Lie	100
2.4.2. Variétés d'orbites et variétés homogènes	107

Chapitre 3. Espaces fibrés 113

3.1. Introduction	113
3.2. Fibré tangent et fibré cotangent	114
3.2.1. Fibré tangent	114
3.2.2. Fibré cotangent	117
3.2.3. Foncteurs fibré tangent et fibré cotangent	118
3.3. Fibrations	118
3.3.1. Notion de fibration	119
3.3.2. Produit fibré et image réciproque de fibrations	121
3.3.3. Revêtements	123
3.3.4. Sections	127
3.4. Espaces fibrés vectoriels	128
3.4.1. Fibrés vectoriels	128
3.4.2. Dual d'un fibré vectoriel	132
3.4.3. Sous-fibrés et fibrés quotients	133
3.4.4. Somme de Whitney et produit tensoriel	134
3.4.5. Catégorie des fibrés vectoriels	135
3.4.6. Image réciproque d'un fibré	140
3.5. Espaces fibrés principaux	142
3.5.1. Notion de fibré principal	142
3.5.2. Vecteurs tangents verticaux	143
3.5.3. Morphismes de fibrés principaux	145
3.5.4. Fibrés principaux définis par des cocycles	145

3.5.5. Espace fibré associé à un fibré principal	146
3.5.6. Extension, restriction, quotientisation du groupe structural	147
3.5.7. Exemples de fibrés principaux triviaux	148
Chapitre 4. Calcul tensoriel sur les variétés	151
4.1. Introduction	151
4.2. Calcul tensoriel	152
4.2.1. Tenseurs	152
4.2.2. Tenseurs symétriques et tenseurs antisymétriques	155
4.2.3. Algèbre extérieure	158
4.2.4. Dualité dans l'algèbre extérieure	159
4.2.5. Produits intérieurs	162
4.2.6. Tenseurs sur des espaces de Banach	164
4.3. Champs de tenseurs	166
4.3.1. Champs de vecteurs	166
4.3.2. Champs de covecteurs	166
4.3.3. Champs de tenseurs et champs scalaires	167
4.4. Formes différentielles	168
4.4.1. Formes différentielles de degré p	168
4.4.2. Image réciproque d'une p -forme différentielle	170
4.4.3. Formes différentielles à valeurs dans un fibré – Formulaire	172
4.4.4. Orientation	175
4.4.5. Intégrale d'une forme différentielle de degré maximal	178
4.4.6. Formes différentielles tordues	184
4.4.7. Intégration d'une forme différentielle sur une chaîne	187
4.5. Variétés pseudo-riemanniennes	191
4.5.1. Métrique	191
4.5.2. Élément de volume pseudo-riemannien	193
Chapitre 5. Calcul différentiel et intégral sur les variétés	195
5.1. Introduction	195
5.2. Courants et opérateurs différentiels	196
5.2.1. Courants et distributions	196
5.2.2. Opérateurs différentiels et distributions ponctuelles	203
5.3. Variétés d'applications	205
5.3.1. Le cadre banachique	205
5.3.2. Le cadre « commode »	208
5.4. Dérivées de Lie	209
5.4.1. Algèbres de Lie	209
5.4.2. Dérivée de Lie d'une fonction	213
5.4.3. Crochets de Lie	214
5.4.4. Dérivée de Lie des champs de vecteurs, de covecteurs et de tenseurs	215

5.4.5. Dérivée de Lie d'une p -forme	217
5.5. Différentielle extérieure	218
5.5.1. Théorème d'É. Cartan	218
5.5.2. Application au calcul vectoriel	221
5.6. Formule de Stokes et applications	222
5.6.1. Formule de Stokes sur une chaîne	222
5.6.2. Formules d'Ostrogradsky et de Green	225
5.6.3. Dualité de Hodge et codifférentielle	229
5.6.4. Théorème de Gauss et formule de Poisson	236
5.6.5. Homologie, cohomologie et dualité	238
5.7. Courbes et variétés intégrales	247
5.7.1. Équations différentielles du premier ordre	247
5.7.2. Équations différentielles du second ordre	251
5.7.3. Sprays	252
5.7.4. Redressement des champs de vecteurs et de repères	255
5.7.5. Variétés intégrales, feuilletages	256

Chapitre 6. Analyse sur les groupes de Lie 269

6.1. Introduction	269
6.2. Convolution	270
6.2.1. Convolution des distributions	270
6.2.2. Mesure de Haar et convolution des fonctions	274
6.3. Classification des algèbres de Lie	280
6.3.1. Compléments d'algèbre	280
6.3.2. Algèbres de Lie classiques	283
6.3.3. Notions générales sur les algèbres de Lie	284
6.3.4. Algèbres de Lie nilpotentes	287
6.3.5. Algèbres de Lie résolubles	289
6.3.6. Algèbres de Lie simples et semi-simples	291
6.3.7. Algèbres de Lie réductives	296
6.3.8. Algèbres de Lie réelles compactes	297
6.4. Relation entre groupes et algèbres de Lie	297
6.4.1. Algèbre de Lie d'un groupe de Lie	298
6.4.2. Passage d'une algèbre de Lie à un groupe de Lie	302
6.4.3. Dictionnaire	306
6.5. Analyse harmonique	309
6.5.1. Introduction	309
6.5.2. Analyse harmonique sur \mathbb{R}^n	311
6.5.3. Séries de Fourier et transformation de Fourier sur le tore	321
6.5.4. Transformation de Fourier sur un groupe commutatif localement compact	328
6.5.5. Aperçu sur l'analyse harmonique non commutative	336

Chapitre 7. Connexions	341
7.1. Introduction	341
7.2. Connexions linéaires	344
7.2.1. Coordonnées curvilignes	344
7.2.2. Connexion linéaire sur un fibré vectoriel	349
7.2.3. Connexion linéaire sur une variété	352
7.2.4. Transport parallèle et géodésiques	354
7.2.5. Différentielle extérieure covariante	356
7.2.6. Courbure et torsion d'une connexion linéaire	358
7.3. Méthode du repère mobile	360
7.3.1. Repère mobile et potentiel de jauge	361
7.3.2. Courbure, torsion et différentielle extérieure covariante d'une \mathbf{G} -connexion	364
7.3.3. Méthode du quasi-parallélogramme	367
7.3.4. Égalités fondamentales	372
7.3.5. Forme de connexion sur le fibré des \mathbf{G} -repères	373
7.3.6. Connexions principales et transport parallèle	375
7.3.7. Différentiation extérieure covariante sur un fibré principal	378
7.3.8. Caractérisation d'une \mathbf{G} -connexion	379
7.3.9. Formes de courbure et de torsion d'une connexion principale	380
7.3.10. Connexions de Cartan	383
7.4. Géométrie riemannienne	386
7.4.1. Connexion de Levi-Civita	386
7.4.2. Géodésiques	388
7.4.3. Variétés pseudo-riemanniennes plates	390
7.4.4. Tenseur de Ricci et tenseur d'Einstein	391
Bibliographie	397
Liste des auteurs cités	407
Index	415
Sommaire de <i>Précis de mathématiques approfondies et fondamentales 1</i>	427
Sommaire de <i>Précis de mathématiques approfondies et fondamentales 2</i>	429