Avant-propos

Ce troisième volume du *Précis de mathématiques approfondies et fondamentales* (dont les deux premiers sont référencés par [P1], [P2]) est consacré au calcul différentiel et intégral, dans ses composantes locale et globale. Il s'adresse à tous les utilisateurs des mathématiques (aussi bien les mathématiciens que les physiciens et les ingénieurs, notamment ceux qui s'intéressent à la commande des systèmes non linéaires). Pour ce qui est des questions locales, le calcul intégral a déjà été en partie traité dans ([P2], chapitre 4) et le calcul différentiel trouve son cadre naturel dans les espaces de Banach au chapitre 1 du présent volume. Néanmoins, quelques généralisations se sont avérées nécessaires pour esquisser le contexte « commode » de l'analyse globale qui s'est développé récemment, et dont nous dirons quelques mots un peu plus loin. Il a également été jugé utile de détailler les « conditions de Carathéodory », plus fines que les conditions classiques de Cauchy-Lipschitz, pour l'existence et l'unicité des solutions des équations différentielles ordinaires en dimension finie.

Pour les questions globales, il est nécessaire d'adopter un point de vue différent. Vue de notre fenêtre, la Terre semble plate, mais déjà les Grecs du temps de Platon la savaient ronde, comme l'atteste un passage du *Phédon* (108, e), et cette connaissance remonte sans doute aux Pythagoriciens du VI^e siècle av. J.C. Par conséquent, on peut inférer qu'Euclide, qui était un fin connaisseur de l'œuvre de Platon (comme l'atteste sa construction des cinq solides de Platon au livre XIII de ses *Éléments*), le savait également. Néanmoins il a construit la géométrie que l'on sait, qui est bien différente de la géométrie sphérique. La géométrie euclidienne est une bonne approximation locale de la géométrie sphérique, mais elle est bien sûr inutilisable pour les grands voyages tels que l'on a pu en réaliser depuis la Renaissance. L'analyse globale ne peut donc s'exprimer que dans les cadres de *variétés*, dont la notion généralise, depuis Riemann, celles de courbe et de surface.

Il est devenu usuel en mathématiques, depuis l'invention du calcul des variations à la fin du XVII^e siècle, de raisonner sur des ensembles de fonctions, ensembles auxquels on peut sous certaines conditions conférer une structure de variété. Ce sont alors des variétés que l'on pourrait appeler « fonctionnelles », versions déformées (comme la Terre l'est par rapport au plan) des espaces fonctionnels usuels. Ce sont tout d'abord les variétés « banachiques » qui ont été envisagées pour servir de cadre à l'analyse globale vers la fin des années 1950 et dans les années 1960 [EEL 66, EEL 66, PAL 68] (versions déformées des espaces de Banach) ; mais comme il appert dans ([P2], section 4.3), nombre d'espaces fonctionnels rencontrés en pratique ne sont pas des espaces de Banach : par exemple l'espace $\mathcal{E}$ des fonctions indéfiniment différentiables dans un ouvert non vide de $\mathbb{R}^n$ est un espace de Fréchet nucléaire. D'où l'intérêt, manifeste depuis les années 1980, d'étudier des variétés qui sont des versions déformées d'espaces de ce type : c'est l'approche « commode », déjà évoquée, de l'analyse globale (parvenue à maturité vers la fin des années 1990 [KRI 97]). Dans le présent ouvrage, nous ne pourrons qu'en donner quelques indications, mais l'étude des variétés d'applications, à la section 5.3, montre son intérêt indéniable.

Les chapitres 2 à 4 développent le formalisme nécessaire, avec au passage la notion, fondamentale depuis É. Cartan, d'espace fibré et en particulier d'espace fibré principal, au chapitre 3. D'après la relativité générale, nous vivons dans un espace pseudo-riemannien, qui est la « base » d'un fibré principal ; celui-ci est la variété des repères orthonormaux, et son « groupe structural » (qui permet d'effectuer les changements de repère) est un « groupe de Lie », à savoir le groupe orthogonal de Lorentz-Poincaré des matrices laissant invariante la forme quadratique $(ds)^2 = c^2\,(dt)^2 - (dx)^2 - (dy)^2 - (dz)^2$. Le calcul tensoriel, qui depuis le début du XX^e siècle a envahi les manuels de physique, est exposé au chapitre 4, de même que la théorie des p-formes différentielles.

C'est à partir du chapitre 5 que tout ce formalisme commence à véritablement porter ses fruits. La notion de distribution, comme celle de courant qui la généralise, peut maintenant être définie sur une variété au lieu d'un ouvert de $\mathbb{R}^n$. La notion de différentielle extérieure d'une p-forme différentielle (due à É. Cartan) permet d'obtenir sous une forme très condensée les formules classiques de « calcul vectoriel » mettant en jeu les notions de gradient, divergence, rotationnel, laplacien, etc. Le premier résultat fondamental de ce chapitre est le théorème de Stokes dans sa formulation générale qui englobe les théorèmes d'utilisation constante en physique, d'Ostrogradsky, de Gauss, de Green-Riemann, de Green, et bien entendu le théorème de Stokes « classique ». Sur une variété riemannienne, le théorème de Stokes permet de développer la dualité de Hodge qui est la source de bien des simplifications dans les calculs vectoriels. Le théorème de Stokes est également à l'origine, du point de vue de la topologie algébrique, de deux types de dualités : celle de Poincaré pour l'homologie et celle de de Rham pour la cohomologie. On sait par exemple que dans $\mathbb{R}^3$, si un champ de vecteurs $\overrightarrow{E}$ dérive d'un potentiel, son rotationnel est nul ; si un champ de vecteurs

$\overset{\hookrightarrow}{B}$ est un rotationnel, sa divergence est nulle. On montre ici la réciproque pour chacune de ces assertions. Le second résultat fondamental du chapitre 5 est le théorème de Frobenius qui donne les conditions nécessaires et suffisantes d'intégrabilité d'une « distribution de contact ». Il est à l'origine de la notion de feuilletage. C'est lui qui permet de montrer au chapitre 7 le résultat de Riemann, crucial dans la théorie de la relativité générale, suivant lequel une variété riemanienne est plate si et seulement si son tenseur de courbure est nul (section 7.4.3, théorème 607).

Un groupe de Lie est une variété, et c'est aussi un groupe ; la structure de groupe permet, au chapitre 6, de réaliser des opérations qui n'auraient pas de sens sur une variété ordinaire, en premier lieu la convolution des fonctions ou des distributions. D'autre part, la « taxinomie » des groupes de Lie est possible à partir des algèbres de Lie de ces groupes, qui sont d'étude plus facile puisque ce sont des espaces vectoriels : l'algèbre de Lie $\mathfrak{g} = \mathrm{Lie}\,(\mathbf{G})$ du groupe de Lie $\mathbf{G}$ est, en tant qu'ensemble, l'espace tangent $T_e\,(\mathbf{G})$ à $\mathbf{G}$ au point e, où e est l'élément neutre de $\mathbf{G}$. Or il existe un « dictionnaire », qui découle des trois « théorèmes fondamentaux » de S. Lie ([COH 65], chapitre V), qui permet de caractériser, au moins localement (et globalement si $\mathbf{G}$ est simplement connexe), un groupe de Lie à partir des propriétés de son algèbre de Lie. La classification ainsi obtenue par Lie est complète dans le cas des groupes (ou algèbres) de Lie simples ou semi-simples, qui sont les plus importants car ce sont eux que l'on rencontre constamment en physique des particules où ils jouent un rôle essentiel (y compris les algèbres de Lie simples dites « exceptionnelles »). Les algèbres de Lie simples et semi-simples s'étudient depuis Cartan grâce à leurs « systèmes de racines » ; leurs représentations graphiques (dues à Coexter et Dynkin entre autres) sont très commodes mais ne pouvaient être détaillées dans cet ouvrage.

Il est également possible, sur un groupe de Lie réductif $\mathbf{G}$, de développer toute l'analyse harmonique (transformation de Fourier des fonctions ou des distributions tempérées). Le cas commutatif est développé en détail : dans le cas où $\mathbf{G} = \mathbb{R}^n$, on retrouve la transformation de Fourier usuelle ; si $\mathbf{G}$ est le tore $\mathbb{T}^n$, on retrouve les développements en série de Fourier des fonctions ou distributions périodiques. Le cas non commutatif, qui demanderait à lui seul tout un volume, n'est que brièvement survolé (bien qu'il ait reçu des applications récentes aux sciences de l'ingénieur [CHI 01]) ; le lecteur le trouvera traité dans les ouvrages figurant dans la bibliographie [VAR 77, VAR 89].

Définir une géométrie sur une variété équivaut à la doter d'une connexion (chapitre 7). Un groupe de Lie est implicitement muni d'une connexion. Une variété riemanienne ou pseudo-riemanienne est souvent implicitement munie de la connexion la plus simple : celle de Levi-Cività. C'est une « $\mathbf{G}$-structure » particulière, d'un usage constant en relativité générale. C'est à É. Cartan que l'on doit la clarification de la notion de connexion ; il a étudié les connexions affines, projectives et conformes, avant de faire leur synthèse en dégageant la notion d'« espace généralisé » [CTN 26] ;

ceux-ci sont munis d'une connexion que, depuis Ehresmann (qui a tout replacé dans le contexte des connexions principales), l'on appelle une *connexion de Cartan*. Les connexions peuvent être douées d'une courbure (notion bien familière à tous les physiciens relativistes) et aussi, dans certains cas, d'une torsion, ce qui a suscité à plusieurs reprises, en particulier vers 1950, un vif intérêt de la part d'Einstein ([EIN 54], Appendice II), qui a vu là la possibilité d'unifier la gravitation et l'électromagnétisme.