

Table des matières

Introduction	1
Familiarisation avec les espaces semi-normés	5
Chapitre 1. Espaces de fonctions continues	7
1.1. Notions de continuité	7
1.2. Espaces $\mathcal{C}(\Omega; E)$, $\mathcal{C}_b(\Omega; E)$, $\mathcal{C}_K(\Omega; E)$, $\mathbf{C}(\Omega; E)$, $\mathbf{C}_b(\Omega; E)$, $\mathbf{C}_D(\Omega; E)$	9
1.3. Comparaison des espaces de fonctions continues	13
1.4. Complétude séquentielle des espaces de fonctions continues	15
1.5. Métrisabilité des espaces de fonctions continues	17
1.6. Espace $\mathcal{K}(\Omega; E)$	20
1.7. Applications continues	26
1.8. Prolongement continu et restriction	27
1.9. Séparation et permutation des variables	28
1.10. Compacité séquentielle dans $\mathbf{C}_b(\Omega; E)$	33
Chapitre 2. Fonctions dérivables	37
2.1. Dérivabilité	37
2.2. Accroissements finis	40
2.3. Dérivées partielles	42
2.4. Dérivées partielles d'ordre supérieur	46
2.5. Espaces $\mathcal{C}^m(\Omega; E)$, $\mathcal{C}_b^m(\Omega; E)$, $\mathcal{C}_K^m(\Omega; E)$, $\mathbf{C}_b^m(\Omega; E)$ et $\mathcal{K}^m(\Omega; E)$	48
2.6. Comparaison et métrisabilité des espaces de fonctions dérivables	51
2.7. Propriétés de filtration des espaces de fonctions dérivables	53
2.8. Complétude séquentielle des espaces de fonctions dérivables	54
2.9. Espace $\mathcal{C}^m(\bar{\Omega}; E)$, ensemble $\mathcal{C}^m(\Omega; U)$	57

Chapitre 3. Dérivation des fonctions composées et autres	61
3.1. Image par une application linéaire	61
3.2. Image par une application multilinéaire : formule de Leibniz	65
3.3. Formule duale de la formule de Leibniz	69
3.4. Continuité de l'image par une application multilinéaire	70
3.5. Changement de variable dans une dérivée	74
3.6. Dérivation par rapport à une variable séparée	78
3.7. Différentiabilité et image par une application différentiable	79
3.8. Dérivation et translation	82
3.9. Fonctions localisantes	84
Chapitre 4. Intégration des fonctions uniformément continues	87
4.1. Mesure d'un ouvert de \mathbb{R}^d	87
4.2. Intégrale d'une fonction uniformément continue	91
4.3. Le cas où E n'est pas de Neumann	95
4.4. Propriétés de l'intégrale	97
4.5. Dépendance de l'intégrale par rapport au domaine d'intégration	100
4.6. Additivité par rapport au domaine d'intégration	103
4.7. Continuité de l'intégrale	105
4.8. Dérivation sous le signe \int	108
Chapitre 5. Quelques propriétés de la mesure d'un ouvert	111
5.1. Additivité de la mesure	111
5.2. Ensembles négligeables	113
5.3. Déterminant de d vecteurs	117
5.4. Mesure d'un parallélépipède	121
Chapitre 6. Intégrations successives, par parties, changement de variable	125
6.1. Contribution d'un ensemble négligeable à l'intégrale	125
6.2. Intégration et dérivation en dimension un	126
6.3. Intégration d'une fonction de fonctions	129
6.4. Intégration d'une fonction de plusieurs variables	131
6.5. Intégration entre des graphes	135
6.6. Intégration par parties et annulation faible d'une fonction	138
6.7. Changement de variable dans une intégrale	140
6.8. Changements de variable particuliers	147
Chapitre 7. Pondération et régularisation des fonctions continues	151
7.1. Pondération	151
7.2. Propriétés de la pondération	154

7.3. Pondération des fonctions dérivables	157
7.4. Régularisation locale	161
7.5. Régularisation globale	166
7.6. Partition de l'unité	170
7.7. Séparabilité de $\mathcal{K}^\infty(\Omega)$	174
Chapitre 8. Circulation d'un champ de vecteurs sur un chemin	177
8.1. Chemins	177
8.2. Circulation d'un champ sur un chemin	180
8.3. Circulation sur un recollement de chemins	185
8.4. Écoulement tubulaire et théorème de concentration	187
8.5. Invariance par homotopie de la circulation d'un gradient local	190
Chapitre 9. Primitives de fonctions continues	195
9.1. Primitive explicite d'un champ à circulation nulle	195
9.2. Primitive d'un champ orthogonal aux divergences nulles	198
9.3. Recollement de primitives locales dans un ouvert simplement connexe	199
9.4. Primitive explicite dans un ouvert étoilé : théorème de Poincaré	201
9.5. Primitive explicite sous la condition de Poincaré affaiblie	203
9.6. Primitives dans un ouvert simplement connexe	207
9.7. Comparaison des conditions d'existence d'une primitive	209
9.8. Champs ayant des primitives locales mais pas de primitive globale.	212
9.9. Unicité d'une primitive	214
9.10. Application primitive continue	214
Chapitre 10. Complément : intégration sur une sphère	217
10.1. Intégrale superficielle sur une sphère	217
10.2. Propriétés de l'intégrale sur une sphère	219
10.3. Calcul radial d'intégrales	222
10.4. Intégrale superficielle comme intégrale en dimension $d - 1$	224
10.5. Une formule de Stokes	228
Annexe. Rappels	231
Notations	243
Bibliographie	247
Index	251