Introduction

Objectif. Ce livre est le deuxième des six volumes d'une série dédiée à la résolution d'équations aux dérivées partielles issues de la physique :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Fonctions continues*
volume 3 : *Distributions*
volume 4 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev*
volume 5 : *Traces*
volume 6 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce deuxième volume a pour objet d'étudier la dérivation partielle des fonctions et la construction de primitives, qui est son application réciproque, et d'en donner les principales propriétés utiles pour la construction des distributions et l'étude des équations aux dérivées partielles.

Public visé. Nous avons cherché des méthodes simples nécessitant le bagage minimal pour rendre cet outil accessible au plus grand nombre — doctorants, étudiants[1] de troisième cycle, ingénieurs — sans en restreindre la généralité… et

1. **Les étudiants ?** Qu'aurais-je pu répondre si l'un de mes étudiants de DEA de 1988 avait voulu des précisions sur le *théorème de dualité de de Rham* auquel je faisais appel pour obtenir la pression dans les équations de Navier–Stokes ? Que ⟪Jacques-Louis LIONS, mon maître, a écrit qu'il résulte du théorème de cohomologie de de Rham, dont je ne comprend ni l'énoncé, ni la démonstration, ni pourquoi il entraîne ce que nous utilisons⟫ ? Déplorable argument d'autorité anti-scientifique.
Ce fut le point de départ de ce travail : écrire des démonstrations que je puisse expliquer à mes étudiants de tout ce que j'utilisais. Il me fallut cinq ans pour trouver la démonstration ⟪élémentaire⟫ du *théorème d'orthogonalité* 9.2, p. 198, sur l'existence de primitives d'un champ q. Le passage de la condition $\int_\Omega q \cdot \psi = 0$ pour tout ψ de divergence nulle à $\oint_\Gamma q \cdot \mathrm{d}\ell = 0$ pour tout lacet Γ m'échappait. Mais j'en tirai ma plus grande satisfaction mathématique, la construction explicite d'un écoulement tubulaire

même en généralisant certains résultats, ce qui destine ce livre également aux chercheurs.

Originalité. La construction de primitives, ainsi que l'intégrale de Cauchy et la pondération avec lesquelles elles sont obtenues, sont faites pour une fonction à valeurs dans un *espace de Neumann*, c'est-à-dire dans lequel toute suite de Cauchy converge.

Espaces de Neumann. La complétude séquentielle, qui caractérise ces espaces, est la propriété la plus générale sur E pour que l'intégrale d'une fonction à valeurs dans E y appartienne (*cf.* le § 4.3, *Le cas où E n'est pas de Neumann*, p. 87). Elle est plus générale que la complétude, c'est-à-dire la convergence de tous les filtres de Cauchy, qui est fréquemment considérée ; par exemple, si E est un espace de Hilbert de dimension infinie, E-faible est un espace de Neumann mais n'est pas complet [volume 1, propriété (4.11), p. 82].

En outre, la complétude séquentielle est plus simple que la complétude.

Semi-normes. Nous utilisons des familles de semi-normes plutôt que des topologies localement convexes, ce qui est équivalent, pour pouvoir définir la différentiabilité (p. 79) en comparant les semi-normes d'une variation de la variable aux semi-normes des variations de l'application. Une *Familiarisation avec les espaces semi-normés* se trouve p. 5. Leur maniement suit celui des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs semi-normes et non plus sur une seule norme.

Primitives. Nous montrons qu'un champ continu $q = (q_1, \dots, q_d)$ a une primitive f, c'est-à-dire que $\nabla f = q$, si et seulement s'il est orthogonal aux champs test à divergence nulle, c'est-à-dire si $\int_\psi q \cdot \psi = 0_E$ pour tout $\psi = (\psi_1, \dots, \psi_d)$ tel que $\nabla \cdot \psi = 0$. C'est le *théorème d'orthogonalité* 9.2.

Lorsque Ω est simplement connexe, il faut et il suffit que q ait des primitives locales. C'est le *théorème de recollement de primitives* 9.4. Dans un tel ouvert, il faut et il suffit également qu'il vérifie la condition de Poincaré $\partial_i q_j = \partial_j q_i$ pour tout i et j s'il est $\mathcal{C}^1$ (théorème 9.10), ou sa version faible $\int_\Omega q_j \partial_i \varphi = \int_\Omega q_i \partial_j \varphi$ pour toute fonction test φ s'il est continu (théorème 9.11).

Nous déterminons explicitement toutes les primitives (théorème 9.17) et nous en exhibons une qui dépend continûment de q (théorème 9.18).

---

incompressible, *cf.* p. 188. Vingt-cinq ans plus tard, me voici enfin prêt à répondre à toutes les autres questions de mes étudiants … persévérants.

Intégration. Nous étendons l'intégrale de Cauchy des fonctions uniformément continues aux valeurs dans un espace de Neumann, car c'est un outil essentiel pour la construction des primitives.

Les propriétés obtenues ici pour les fonctions continues serviront également à leur extension aux distributions intégrables, au volume 4, par continuité ou transposition. En effet, un des objectifs de cette série *Analyse pour les edp* est d'étendre l'intégration et les espaces de Sobolev aux valeurs dans un tel espace de Neumann. Mais, pour cela, il nous a paru plus simple de construire d'abord les distributions (au volume 3) avec les seules fonctions continues, puis (au volume 4) les distributions intégrables qui jouent le rôle des habituelles *classes de fonctions intégrables presque partout égales*.

Pondération. La pondérée $f \diamond \mu$ d'une fonction f, définie dans un ouvert Ω, par un poids μ, poids qui est une fonction réelle à support compact D, est une fonction définie dans l'ouvert $\Omega_D = \{x \in \mathbb{R}^d : x + D \subset \Omega\}$ par $(f \diamond \mu)(x) = \int_{\mathring{D}} f(x+y)\,\mu(y)\,\mathrm{d}y$. Elle intervient constamment. Elle joue un rôle analogue à celui joué par la convolution, que l'on retrouve à une symétrie près sur μ, lorsque $\Omega = \mathbb{R}^d$.

Nouveautés. Beaucoup de résultats sont des extensions naturelles de résultats antérieurs, mais les suivants nous semblent mériter l'attention :
— La construction de la topologie de l'espace $\mathcal{K}(\Omega; E)$ des fonctions continues à support compact par les semi-normes $\|f\|_{\mathcal{K}(\Omega;E);q} = \sup_{x\in\Omega} q(x)\|f(x)\|_{E;\nu}$ indexées par $q \in \mathcal{C}^+(\Omega)$ et $\nu \in \mathcal{N}_E$ (définition 1.17). Elle équivaut, en beaucoup plus simple, à la topologie de limite inductive des $\mathcal{C}_K(\Omega; E)$.
— Le fait que, si une fonction $f \in \mathcal{C}(\Omega)$ vérifie $\sup_{x\in\Omega} q(x)|f(x)| < \infty$ pour tout $q \in \mathcal{C}^+(\Omega)$, alors son support est compact (théorème 1.22). Il est à la base de la définition des semi-normes de $\mathcal{D}(\Omega)$ faite au volume 3.
— Le *théorème de concentration* de l'intégrale et la construction d'un *écoulement tubulaire* incompressible (théorèmes 8.18 et 8.17), points clé de notre construction des primitives d'un champ à valeurs dans un espace de Neumann, *cf.* le commentaire *Utilité du théorème de concentration*, p. 189.

Pré-requis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel qu'à des définitions et des résultats établis au volume 1 dont les énoncés sont rappelés, dans le texte ou en annexe. Elles sont détaillées en incluant des arguments triviaux pour un connaisseur et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères, contrairement au corps du texte, font appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. L'annexe *Rappels* est, elle aussi, composée en petits caractères, car elle peut être supposée connue.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est, autant que possible, précisée en notes[2] de bas de page.

Navigation dans le livre.
— La **table des matières**, en tête du livre, donne la liste des thèmes traités.
— La **table des notations**, p. 243, précise leur sens en cas de doute.
— L'**index**, p. 251, fournit un autre accès thématique.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés afin de les retrouver aisément en suivant l'ordre des numéros (ainsi, le théorème 2.9 se trouve entre les énoncés 2.8 et 2.10, qui sont respectivement une définition et un théorème).

Remerciements. Enrique FERNÁNDEZ-CARA m'a suggéré de très nombreuses améliorations des versions successives de ce travail. Jérôme LEMOINE a, lui aussi, bien voulu en relire les innombrables versions et corriger les non moins innombrables coquilles et maladresses qui s'y trouvaient.

Olivier BESSON, Fulbert MIGNOT, Nicolas DEPAUW et Didier BRESCH ont, eux aussi, apporté de nombreuses améliorations, sur la forme comme sur le fond.

Pierre DREYFUSS m'a apporté les éclaircissements sur la nécessité ou non de la simple connexité du domaine pour l'existence de primitives sous la condition de Poincaré qui sont indiqués p. 213, dans le commentaire *Nécessité de la simple connexité pour le recollement de primitives locales*.

Merci, mes amis.

Jacques SIMON
Chapdes-Beaufort, le 30 juin 2019

2. **Appel au lecteur.** Nombre de résultats importants n'ont pas de note historique, car j'en ignore tout. Je sollicite l'indulgence du lecteur pour ces lacunes et, surtout, pour les injustices qu'il pourra relever. Et je fais appel aux érudits pour me signaler les améliorations à apporter… pour les rééditions.