

Table des matières

Avant-propos	1
1 Cinématique	5
1.1 Observateur/Référentiel	5
1.2 Temps	6
1.2.1 Postulat des dates	6
1.2.2 Postulat de changement de dates	6
1.3 Espace	7
1.3.1 Espace physique	7
1.3.2 Espace mathématique	8
1.3.3 Postulat des positions	8
1.3.4 Opérations usuelles sur l'espace mathématique \mathcal{E}	11
1.3.5 Postulat de changement de positions	11
1.3.6 Référentiel commun R_0	13
1.3.7 Repère d'un référentiel	16
1.3.8 Point fixe et vecteur fixe dans un référentiel	18
1.4 Dérivée dans un référentiel d'un vecteur	19
1.5 Vitesse d'une particule	21
1.6 Vitesse de rotation	21
1.7 Référentiel défini par un solide – Solide défini par un référentiel	23
1.8 Point lié à un solide – Vecteur lié à un solide	23
1.9 Vitesses dans un solide	24
1.9.1 Champ de vitesses	25
1.9.2 Torseurs des vitesses sur un solide	26
1.10 Vitesses dans un système matériel	26
1.11 Accélération d'une particule	27
2 Paramétrage et cinématique paramétrée	29
2.1 Paramètres de position	29
2.1.1 Paramètres de position d'une particule	29
2.1.2 Paramètres de position d'un solide	30
2.1.3 Paramètres de position d'un système de solides	34
2.2 Liaisons	34
2.3 Équations de liaison	35
2.4 Paramétrage	39
2.5 Dépendance du tenseur de rotation du référentiel vis-à-vis des paramètres retenus	41

2.6	Vitesse d'une particule	43
2.7	Vitesse de rotation	46
2.8	Vitesses dans un solide	47
2.9	Vitesses dans un système matériel	49
2.10	Vitesse paramétrée d'une particule	50
2.10.1	Définition	50
2.10.2	Calcul pratique de la vitesse paramétrée	51
2.11	Vitesses paramétrées dans un solide	52
2.11.1	Champ de vitesses paramétrées	53
2.11.2	Torseurs des vitesses paramétrées sur un solide	53
2.12	Vitesses paramétrées dans un système matériel	53
2.12.1	Champ de vitesses paramétrées	53
2.12.2	En résumé	54
2.13	Formule cinématique de Lagrange	54
2.14	Énergie cinétique paramétrée	56
3	Efforts	59
3.1	Forces	59
3.2	Couples	61
3.3	Efforts	62
3.4	Efforts extérieurs/Efforts intérieurs	63
3.4.1	Efforts extérieurs	63
3.4.2	Efforts intérieurs	63
3.5	Efforts donnés/Efforts de liaison	64
3.6	Torseur des efforts	65
4	Cinématique virtuelle	69
4.1	Dérivée virtuelle dans un référentiel d'un vecteur	69
4.1.1	Dépendance de la dérivée virtuelle vis-à-vis du référentiel	71
4.2	Vitesse virtuelle d'une particule	72
4.2.1	Analogie entre vitesse réelle et vitesse virtuelle	73
4.2.2	Passage de la vitesse réelle à la vitesse virtuelle	73
4.2.3	Exemple et contre-exemple	73
4.2.4	Dépendance de la vitesse virtuelle vis-à-vis du temps	75
4.2.5	Dépendance de la vitesse virtuelle vis-à-vis du référentiel	75
4.3	Vitesse de rotation virtuelle	76
4.3.1	Analogie entre vitesse de rotation réelle et vitesse de rotation virtuelle	79
4.3.2	Passage de la vitesse de rotation réelle à la vitesse de rotation virtuelle	79
4.3.3	Dépendance de la vitesse de rotation virtuelle vis-à-vis du temps	80
4.3.4	Dépendance de la vitesse de rotation virtuelle vis-à-vis des référentiels	81
4.3.5	Dérivation virtuelle dans R_1 d'un vecteur constant dans R_2	82
4.4	Vitesses virtuelles dans un solide	82
4.4.1	Champ de vitesses virtuelles (CVV) associé à un paramétrage	83
4.4.2	Torseur des vitesses virtuelles sur un solide	84
4.5	Vitesses virtuelles dans un système matériel	85
4.5.1	CVV associé à un paramétrage	85
4.5.2	Torseur des vitesses virtuelles par morceaux	86
4.5.3	Vitesse virtuelle du centre de masse	86
4.6	Composition des vitesses virtuelles	87
4.6.1	Composition des vitesses virtuelles d'une particule	87
4.6.2	Composition des vitesses de rotation virtuelle	88

4.6.3	Composition des torseurs des vitesses virtuelles de solides	89
4.7	Méthode de calcul de la vitesse virtuelle en un point	90
5	Puissances virtuelles	93
5.1	Principe des puissances virtuelles (PPV)	93
5.2	Puissance virtuelle (PV) des efforts internes à chaque solide	94
5.3	PV des efforts	94
5.4	PV des efforts exercés sur un solide	96
5.4.1	Expression générale	96
5.4.2	PV des efforts de torseur nul exercés sur un solide	96
5.4.3	Dépendance de la PV des efforts par rapport au référentiel	97
5.5	PV des efforts exercés sur un système de solides	97
5.5.1	Expression générale	97
5.5.2	Dépendance de la PV des efforts par rapport au référentiel	98
5.5.3	PV des efforts de torseur nul exercés sur un système de solides	99
5.5.4	PV des inter-efforts entre les solides d'un système	99
5.6	Résumé des cas d'indépendance vis-à-vis du référentiel	100
5.7	PV des efforts exprimée comme une forme linéaire des \dot{q}_i^*	101
5.8	Potentiel	103
5.8.1	Définition	103
5.8.2	Exemples de potentiel	104
5.8.2.1	Force ponctuelle constante	104
5.8.2.2	Champ de forces constant	104
5.8.2.3	Champ de pesanteur	105
5.8.2.4	Force de rappel sur une particule	105
5.8.2.5	Force due à un ressort	106
5.8.2.6	Inter-efforts dus à un ressort	108
5.9	PV des quantités d'accélération	110
6	Équations de Lagrange	113
6.1	Choix du référentiel commun R_0	113
6.2	Équations de Lagrange	114
6.3	Bilan et nécessité de schématiser les liaisons	117
6.4	Existence et unicité de la solution	118
6.5	Équations de mouvement	120
6.6	Exemple : disque roulant sur un axe avec frottement et résistance au roulement	120
6.7	Exemple : disque roulant sur un axe sans glissement et sans résistance au roulement	122
6.7.1	Paramétrage réduit	122
6.7.2	Paramétrage total	123
6.7.3	Comparaison des deux paramétrages	124
6.8	Exemple : chariot relié à une particule	125
6.8.1	Paramétrage indépendant	126
6.8.2	Paramétrage total	128
6.8.3	Comparaison des deux paramétrages	129
6.9	Travail dans un référentiel non galiléen	129

7	Liaisons parfaites	133
7.1	Champs de vitesses virtuelles (CVV) compatibles avec une liaison mécanique . . .	134
7.1.1	Définition	134
7.1.2	Généralisations de la définition d'un CVV compatible	136
7.1.3	Exemple : CVV compatibles avec une liaison mécanique	137
7.1.4	Exemple : CVV compatibles avec une liaison mécanique en coordonnées polaires	139
7.1.5	Exemple : particule se déplaçant sur un cerceau tournant autour d'un axe fixe	139
7.2	Invariance des CVV compatibles vis-à-vis du choix des paramètres primitifs . . .	141
7.2.1	Contexte	141
7.2.2	Relations entre les grandeurs réelles issues des deux paramétrages	143
7.2.3	Relations entre les grandeurs virtuelles issues des deux paramétrages . . .	144
7.2.4	Identité entre les CVV associés aux deux paramétrages et compatibles avec une liaison mécanique	145
7.2.5	Exemple : identité des CVV compatibles associés à deux paramétrages . . .	148
7.3	Invariance des CVV compatibles vis-à-vis du choix des paramètres retenus . . .	151
7.3.1	Contexte	151
7.3.2	Relations entre les grandeurs réelles issues des deux paramétrages	153
7.3.3	Relations entre les grandeurs virtuelles issues des deux paramétrages . . .	154
7.3.4	Identité entre les CVV associés aux deux paramétrages et compatibles avec une liaison mécanique	156
7.3.5	Exemple : identité entre les CVV compatibles associés aux deux paramétrages	158
7.3.6	Exemple : identité entre les CVV compatibles associés aux deux paramétrages en coordonnées polaires	159
7.3.7	Exemple : particule se déplaçant sur un cerceau tournant autour d'un axe fixe	160
7.4	Invariance des CVV compatibles vis-à-vis du choix du paramétrage	161
7.5	Liaisons parfaites	161
7.5.1	Définition d'une liaison parfaite	161
7.5.2	Exemple : liaison parfaite	164
7.5.3	Exemple : liaison parfaite en coordonnées polaires	165
7.5.4	Exemple : liaison parfaite entre une particule et un cerceau	166
7.5.5	Exemple : liaison parfaite entre un disque et un axe	169
7.5.5.1	Cas du contact simple en I	169
7.5.5.2	Cas du contact sans glissement en I	170
7.5.5.3	En résumé	170
7.6	Exemple : liaison combinée parfaite	171
7.6.1	Liaison combinée parfaite	172
7.6.2	Superposition de deux liaisons élémentaires parfaites	173
7.6.2.1	Rotule parfaite en A	173
7.6.2.2	Contact ponctuel parfait en I	174
7.6.2.3	Conclusion	175
8	Équations de Lagrange dans le cas des liaisons parfaites	177
8.1	Équations de Lagrange dans le cas des liaisons parfaites et d'un paramétrage indépendant	178
8.1.1	Équations de Lagrange	178
8.1.2	Bilan	178
8.1.3	Cas particulier	179

8.2	Équations de Lagrange dans le cas des liaisons parfaites et de présence d'équations de liaison complémentaires	179
8.2.1	Équations de Lagrange avec multiplicateurs	180
8.2.2	Calcul pratique avec les multiplicateurs de Lagrange	182
8.2.3	Bilan	184
8.2.4	Remarques	184
8.3	Exemple : particule sur un cerceau tournant	185
8.3.1	Paramétrage indépendant	186
8.3.2	Paramétrage réduit (1)	187
8.3.3	Paramétrage réduit (2)	188
8.3.4	Calcul du couple moteur	189
8.4	Exemple : solide rotulé à une barre tournante (1)	191
8.5	Exemple : solide rotulé à une barre tournante (2)	193
8.5.1	Paramétrage total	193
8.5.2	Paramétrage indépendant	195
8.6	Exemple : solide soumis à un double contact	195
8.6.1	Analyse préliminaire	196
8.6.2	Paramétrage indépendant	198
8.6.3	Paramétrage réduit	199
9	Intégrales premières	203
9.1	Intégrale première de Painlevé	203
9.1.1	Lemme de Painlevé	203
9.1.2	Intégrale première de Painlevé	205
9.2	Intégrale première de l'énergie mécanique : systèmes conservatifs	207
9.2.1	Considérations énergétiques supplémentaires à l'intégrale première de l'énergie mécanique	209
9.3	Exemple : disque roulant sur une barre suspendue	209
9.4	Exemple : particule sur un cerceau tournant	212
9.5	Exemple : solide rotulé à une barre tournante (1)	213
9.5.1	Retrouver les intégrales premières par la mécanique newtonienne	213
9.6	Exemple : solide rotulé à une barre tournante (2)	214
9.7	Exemple : solide soumis à un double contact	214
9.7.1	Retrouver une intégrale première par la mécanique newtonienne	215
10	Équilibre	217
10.1	Définitions	217
10.1.1	Équilibre absolu	217
10.1.2	Équilibre paramétrique	218
10.2	Équations d'équilibre	219
10.2.1	Bilan des équations et des inconnues	222
10.2.2	Existence et unicité de la solution	222
10.2.3	Présence explicite du temps dans les équations d'équilibre	223
10.3	Équations d'équilibre dans le cas des liaisons parfaites et d'un paramétrage indépendant	223
10.3.1	Bilan des équations et des inconnues	224
10.4	Équations d'équilibre dans le cas des liaisons parfaites et de présence d'équations de liaison complémentaires	225
10.4.1	Bilan des équations et des inconnues	226
10.5	Stabilité d'un équilibre	227
10.6	Exemple : équilibre d'un cric	228

10.7	Exemple : équilibre d'un plateau élévateur	230
10.8	Exemple : équilibre d'une barre dans une gouttière	231
10.9	Exemple : existence de plages d'équilibre	233
10.10	Exemple : équilibre relatif dans un référentiel tournant	234
10.11	Exemple : équilibre en présence d'inégalités de contact	236
10.12	Calcul des efforts internes	240
10.13	Exemple : efforts internes dans un système à barres	240
10.13.1	Calcul de l'effort normal dans la barre $A'A$	241
10.13.2	Calcul de l'effort normal dans la barre $B'B$	243
10.14	Exemple : étude d'un trépid	244
11	Problèmes de synthèse	247
11.1	Équilibre de deux barres	247
11.1.1	Étude à l'aide du principe fondamental de la statique	248
11.2	Équilibre d'une chaise élastique	249
11.3	Équilibre d'une benne de camion	251
11.4	Équilibre d'un pendule équerre	253
11.5	Mouvement d'un métronome	254
11.5.1	Équation de mouvement	254
11.5.2	Intégrale première	255
11.5.3	Cas des petites oscillations	255
11.5.4	Cas où le socle S peut glisser sans frottement sur la table T	255
11.5.5	Intégrale première	256
11.6	Étude d'une enveloppe demi-sphérique	256
11.6.1	Étude de l'équilibre statique	257
11.6.2	Étude du mouvement oscillatoire	258
11.7	Basculement d'un bloc sur un cylindre	258
11.7.1	Étude de l'équilibre	260
11.7.2	Étude dynamique	261
11.7.3	Cas des petites oscillations	261
11.8	Disque soudé à une tige	261
11.8.1	Premier paramétrage	262
11.8.2	Intégrale première	263
11.8.3	Second paramétrage	263
11.8.4	Troisième paramétrage	265
11.9	Mouvement de deux barres	266
11.9.1	Équations de mouvement	267
11.9.2	Équilibre relatif	268
11.10	Système avec liaison par fil parfait	268
11.10.1	Équations de Lagrange	270
11.10.2	Intégrale première	271
11.11	Système tige-disque tournant	272
11.11.1	Paramétrage indépendant	272
11.11.2	Paramétrage total	273
11.11.3	Couple moteur	275
11.12	Haltère	275
11.12.1	Mise en équations	277
11.12.2	Intégrales premières	278
11.12.3	Étude avec des conditions initiales particulières	279
11.12.4	Équilibre relatif	279

11.13	Haltère sous couple moteur	280
11.13.1	Paramétrage indépendant	280
11.13.2	Intégrale première de Painlevé	281
11.13.3	Paramétrage total	281
11.14	Solide avec une liaison non parfaite	283
11.14.1	Mise en équations	283
11.14.2	Résolution	285
11.14.3	Puissance du moteur et travail dissipé par le frottement	285
Annexe 1. Tenseurs		287
Annexe 2. Étude des liaisons usuelles parfaites		291
Bibliographie		303
Index		305