

Avant-propos

Il existe deux approches distinctes et équivalentes pour résoudre un problème de mécanique des solides rigides : celle de Newton qui repose sur le principe fondamental de la dynamique et celle de Lagrange qui repose sur le postulat appelé le principe des puissances virtuelles et qui donne lieu à la mécanique dite lagrangienne ou analytique.

Bien que les deux approches fournissent des résultats équivalents, elles diffèrent en un certain nombre de points sur le plan de la conception et de la formulation. Outre les ingrédients habituels que sont la vitesse, l'accélération, la masse et les forces, la mécanique analytique fait appel à une nouvelle notion qui n'existe pas en mécanique newtonienne et qui est appelée de manière énigmatique la vitesse virtuelle, notion à partir de laquelle on définit les puissances virtuelles. Alors que le principe fondamental de la dynamique relie les grandeurs vectorielles (force et accélération), le principe des puissances virtuelles s'énonce en termes des puissances virtuelles qui sont des grandeurs scalaires. La mécanique analytique se distingue aussi par le fait que le paramétrage y joue un rôle primordial : pour un même problème mécanique, on peut choisir différents paramétrages et les équations qui en découlent – donc les informations obtenues – diffèrent selon le paramétrage choisi. Un autre fait marquant démontré en mécanique analytique est que, une fois le paramétrage choisi, la cinématique du système, par essence *vectorielle*, est condensée dans une fonction *scalaire*, appelée énergie cinétique paramétrée.

Alors que la mécanique newtonienne met en jeu des notions physiques simples à appréhender, la théorie de Lagrange paraît plus compliquée à cause de la vitesse virtuelle et de l'énoncé même du principe des puissances virtuelles. Cependant, cette difficulté conceptuelle est compensée par deux avantages techniques :

- (i) on constate que la tâche du mécanicien se réduit pratiquement à bien choisir le paramétrage du système étudié. Une fois le paramétrage choisi, les équations de Lagrange conduisent systématiquement à autant d'équations que d'inconnues (si le problème est bien posé). Bien sûr, on peut aussi obtenir suffisamment d'équations avec l'approche newtonienne mais il n'y a pas de méthodes systématiques : il faut effectuer au préalable une analyse des efforts appliqués et souvent subdiviser le système mécanique étudié de manière adéquate puis écrire les équations pour les sous-systèmes ;
- (ii) les opérations effectuées en mécanique analytique – notamment le calcul de l'énergie cinétique paramétrée et ses dérivées – sont purement algébriques et donc *programmables*. Ceci explique le succès de la mécanique analytique dans l'étude des systèmes complexes comportant un grand nombre de paramètres cinématiques, où les équations de mouvement sont plus difficiles à obtenir avec l'approche de Newton.

Cet ouvrage vise à expliquer les subtilités de la mécanique analytique et à aider le lecteur à maîtriser le mécanisme d'obtention des équations de Lagrange, afin d'exploiter pleinement le potentiel de cette formulation élégante et efficace. Il s'adresse aux étudiants de licence, de master ou des écoles d'ingénieurs qui s'intéressent à une étude approfondie de la mécanique analytique et à ses applications, ainsi qu'aux enseignants en mécanique, aux ingénieurs et à toute personne désireuse de revoir les bases de cette matière. Même si le contenu ne nécessite pas de connaissances préalables, il est préférable que le lecteur soit familiarisé avec la mécanique newtonienne.

Format adopté de l'ouvrage

En rédigeant le présent ouvrage, les auteurs se donnent l'objectif de revisiter la mécanique analytique et de la présenter sous un angle nouveau à la fois sur la forme et le style :

- par l'adoption d'un exposé plus axiomatique et plus formel qu'un exposé classique ;
- et par un effort particulier fait sur le plan des notations pour aboutir à une écriture à la fois plus précise et plus concise.

Un exposé axiomatique signifie que, tout au long de l'ouvrage, les chapitres sont construits de manière analogue à un exposé mathématique, où les ingrédients se présentent dans l'ordre suivant :

1. les définitions pour fixer le vocabulaire ;
2. les théorèmes où on démontre les résultats et où on met en relief les hypothèses indiquant clairement les conditions d'applicabilité de tel ou tel résultat ;
3. les exemples pour illustrer les subtilités de la théorie et le mécanisme de calcul.

Si la théorie est construite de manière déductive et forme un bloc monolithique, chaque théorème est énoncé sous forme autonome et condensée – à savoir les hypothèses suivies du résultat – pour qu'il soit prêt à l'emploi.

Synopsis de l'ouvrage

Le livre contient onze chapitres et deux annexes.

Le chapitre 1 rappelle les ingrédients de base de la cinématique : le temps, l'espace et l'observateur (ou le référentiel). On y présente la notion-clé de la dérivée d'un vecteur par rapport à un référentiel et on introduit ce qui est appelé le référentiel commun, qui sert de lien entre les différents référentiels.

Le chapitre 2 porte une opération importante en mécanique analytique, qui est le paramétrage du système mécanique étudié. Cette opération consiste à choisir un certain nombre de paramètres primitifs du système, à traduire toutes les liaisons existantes en termes de ces paramètres et enfin à classer les équations de liaison en deux catégories qualifiées de primitive et complémentaire. Cette tâche qui incombe au mécanicien est spécifique à la mécanique analytique et n'a pas d'équivalent en mécanique newtonienne. Elle est d'importance car on verra que les équations de Lagrange obtenues – et par voie de conséquence les informations que l'on peut tirer – dépendent essentiellement du choix du paramétrage.

Le paramétrage du système conduit à définir les vitesses paramétrées et l'énergie cinétique paramétrée, notion sur laquelle est basée la formule cinématique de Lagrange.

Le chapitre 3 rappelle la notion classique des efforts qui comprennent les forces et les couples. On peut les classer soit en efforts intérieurs et extérieurs, soit en efforts donnés et de liaison. Les puissances virtuelles des efforts seront calculées au chapitre 5 en fonction de la catégorie des efforts.

Le chapitre 4, consacré à la cinématique virtuelle, introduit de nouvelles grandeurs cinématiques homologues à celles du chapitre 1 et qualifiées de virtuelles : la dérivée virtuelle dans un référentiel d'un vecteur, la vitesse virtuelle d'une particule, le champ des vitesses virtuelles dans un solide ou dans un système de solides, et enfin la vitesse de rotation virtuelle d'un solide. On y trouve les formules pour calculer ces grandeurs et notamment celles de la composition des vitesses virtuelles.

Le chapitre 5 porte sur la puissance virtuelle qui est *grosso modo* le produit d'un effort vu au chapitre 3 et d'une vitesse virtuelle vue au chapitre 4. La présentation suit de près celle classique des puissances réelles en mécanique newtonienne et on obtient plusieurs résultats analogues à ceux pour les puissances réelles. Deux résultats sont cependant spécifiques à la mécanique analytique : la puissance virtuelle exprimée comme une forme linéaire et la puissance des quantités d'accélération.

Le chapitre 6 montre comment exploiter le principe de puissances virtuelles à l'aide des résultats obtenus aux chapitres précédents pour aboutir au produit final de la mécanique analytique que sont les fameuses équations de Lagrange. On y trouve plusieurs exemples d'application qui illustrent l'importance du choix du paramétrage et sa conséquence sur les résultats de résolution. Ce chapitre est clôturé par l'écriture des équations de Lagrange dans un référentiel non galiléen.

Les chapitres 7 et 8 traitent des liaisons parfaites dont l'intérêt réside dans le fait que les coefficients de puissance présents dans le second membre des équations de Lagrange sont alors nuls ou peuvent être calculés de manière simple à l'aide des multiplicateurs de Lagrange. La notion de liaison parfaite existe aussi en mécanique newtonienne mais sa définition y est plus simple et les conséquences plus immédiates. En mécanique analytique, la définition d'une liaison parfaite est moins naturelle dans la mesure où elle fait intervenir le paramétrage et les vitesses virtuelles compatibles avec les équations de liaison complémentaires. Il est donc important de vérifier que le caractère parfait d'une liaison est intrinsèque au sens qu'il ne dépend pas du paramétrage choisi. C'est ainsi qu'une grande partie du chapitre 7 est consacrée à l'invariance du champs des vitesses virtuelles vis-à-vis du paramétrage.

Le chapitre 9 est consacré aux intégrales premières dont l'intérêt est de donner des équations différentielles du premier ordre plus faciles à résoudre. L'intégrale première dite de Painlevé n'a pas d'équivalent en mécanique newtonienne et a la particularité de pouvoir exister sur des systèmes qui reçoivent de l'énergie de l'extérieur. L'intégrale première de l'énergie mécanique ressemble à celle en mécanique newtonienne avec cependant des conditions d'application légèrement différentes.

Le chapitre 10 montre comment les équations de Lagrange se simplifient dans le cas particulier de l'équilibre. On y discute aussi brièvement la question de la stabilité d'une position d'équilibre.

Le chapitre 11 regroupe plusieurs exemples de révision.

L'ouvrage se termine par deux annexes. L'annexe 1 fournit quelques notions élémentaires sur les tenseurs d'ordre 2, nécessaires à l'étude de la cinématique.

L'annexe 2 est un complément du chapitre 7, on y établit des conditions nécessaires et suffisantes de perfection pour les liaisons usuellement rencontrées en mécanique.

En introduisant le concept des grandeurs virtuelles, la mécanique de Lagrange est plus abstraite que celle de Newton. Cependant, elle s'avère plus fertile dans la mesure où elle se prolonge au-delà de la mécanique des solides rigides pour permettre des formulations plus élégantes et systématiques en mécanique des milieux déformables, pour ne pas dire en physique en général. C'est pour cette raison que la mécanique analytique est l'une des matières fondamentales enseignées en mécanique. En rédigeant ce livre, les auteurs espèrent offrir au lecteur une vision synthétique et une parfaite maîtrise de cette belle formulation.

Remerciements

Le premier auteur remercie madame Annick Molinaro, enseignante en mécanique à la Faculté des sciences de Nantes et à l'École nationale supérieure de mécanique (ENSM) dans les années 1970-1980, pour lui avoir inculqué l'utilisation systématique de la notation dite à double indice, notation à la fois concise et précise qui est reprise dans ce livre. Il tient aussi à remercier les anciens collègues de l'équipe enseignante à l'ENSM Certains exemples dans ce livre, tirés des archives des travaux dirigés de l'équipe, ont été le fruit de longues réflexions et discussions entre plusieurs enseignants dont certains ont aujourd'hui disparu.

Le second auteur remercie le professeur Pierre Jouve pour l'avoir accompagné dans ses premières années d'enseignement. Quelques exemples figurant dans ce livre, même s'ils ont été remaniés, ont été conçus à l'origine par lui. Qu'il soit remercié pleinement pour sa contribution significative aux enseignements de mécanique dispensés à la Faculté des sciences et des techniques de Nantes.