

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
<b>Introduction</b> . . . . .	3
<b>Chapitre 1. Métrique, définitions et propriétés</b> . . . . .	7
1.1. Définitions et propriétés . . . . .	8
1.2. Interpolation et intersection de métriques . . . . .	12
1.2.1. Interpolation de métriques . . . . .	13
1.2.2. Intersection de métriques . . . . .	20
1.3. Métriques géométriques . . . . .	20
1.3.1. Métrique géométrique pour une courbe . . . . .	22
1.3.2. Métrique géométrique pour une surface . . . . .	24
1.3.3. Rendre géométrique une métrique quelconque . . . . .	29
1.4. Métriques de maillage . . . . .	29
1.5. Gradation de métriques . . . . .	30
1.6. Métrique d'un élément . . . . .	37
1.6.1. Métrique d'un élément simplicial . . . . .	37
1.6.2. Métrique d'un élément non simplicial . . . . .	44
1.6.3. Métrique d'un élément de degré quelconque . . . . .	44
1.7. Qualité en forme et métrique d'élément . . . . .	45
1.8. Calculs pratiques en présence d'une métrique . . . . .	52
1.8.1. Calcul d'une longueur . . . . .	52
1.8.2. Calcul d'un angle, d'une aire ou d'un volume . . . . .	55
<b>Chapitre 2. Erreurs et métriques d'interpolation</b> . . . . .	59
2.1. Quelques propriétés . . . . .	60
2.2. Erreur d'interpolation d'une fonction quadratique . . . . .	62
2.3. Formulation Bézier et erreur d'interpolation . . . . .	68
2.3.1. Pour une fonction quadratique . . . . .	68
2.3.2. Pour une fonction cubique . . . . .	72
2.3.3. Pour une fonction polynomiale de degré quelconque . . . . .	86

2.3.4. Seuil d'erreur ou densité de maillage . . . . .	90
2.4. Calculs des dérivées discrètes . . . . .	91
2.4.1. Méthode de la double projection $L^2$ . . . . .	92
2.4.2. Formule de Green . . . . .	94
2.4.3. Moindres carrés et Taylor . . . . .	95
<b>Chapitre 3. Maillage d'une courbe</b> . . . . .	97
3.1. Maillage d'une courbe paramétrique . . . . .	99
3.1.1. Courbe dans $\mathbb{R}^3$ . . . . .	99
3.1.2. Sur les métriques utilisées et le calcul des longueurs . . . . .	104
3.1.3. Courbe tracée sur un carreau . . . . .	107
3.2. Maillage d'une courbe discrète . . . . .	108
3.3. Remaillage d'une courbe maillée . . . . .	108
<b>Chapitre 4. Maillage simplicial</b> . . . . .	111
4.1. Définitions . . . . .	112
4.2. Maillage d'une variété (une surface) . . . . .	114
4.2.1. Maillage carreau par carreau . . . . .	114
4.2.2. Remaillage d'une surface discrète . . . . .	124
4.2.3. Maillage <i>via</i> un mailleur volumique . . . . .	125
4.3. Maillage d'un domaine plan ou volumique . . . . .	126
4.3.1. Méthode par arbre . . . . .	127
4.3.2. Méthode frontale . . . . .	130
4.3.3. Méthode basée sur Delaunay . . . . .	133
4.3.4. Remaillage d'un domaine maillé . . . . .	139
4.4. Autres méthodes de génération ? . . . . .	140
<b>Chapitre 5. Maillage non simplicial</b> . . . . .	145
5.1. Définitions . . . . .	146
5.2. Maillage d'une variété . . . . .	148
5.3. Méthodes de construction pour mailler un domaine plan ou volumique . . . . .	149
5.3.1. Géométrie cylindrique et méthode d'extrusion . . . . .	151
5.3.2. Méthodes algébriques et méthode par blocs . . . . .	152
5.3.3. Méthode par arbre . . . . .	176
5.3.4. Méthode par appariement . . . . .	178
5.3.5. Maillage en cellules polygonales ou polyédriques . . . . .	180
5.3.6. Construction de couches limites . . . . .	182
5.4. Autres méthodes de génération ? . . . . .	187
5.4.1. Maillage par « Q-morphisme » ou « H-morphisme » . . . . .	187
5.4.2. Maillage <i>via</i> un champ de repères . . . . .	188
5.5. Invariants topologiques (quadrilatères et hexaèdres) . . . . .	190
<b>Chapitre 6. Construction de maillages de degré élevé</b> . . . . .	199
6.1. Maillages droits . . . . .	200
6.1.1. Numérotation locale des nœuds . . . . .	200

6.1.2. Numérotation globale des nœuds . . . . .	205
6.1.3. Position des nœuds . . . . .	209
6.1.4. Sur le remplissage des matrices selon le degré des éléments . . . . .	212
6.2. Construction de maillages courbes . . . . .	213
6.2.1. Maillage de degré 1 . . . . .	214
6.2.2. Création des nœuds . . . . .	214
6.2.3. Déformation et validation . . . . .	215
6.2.4. Schéma général . . . . .	216
6.3. Maillages courbes sur une variété, courbe ou surface . . . . .	221
<b>Chapitre 7. Optimisation de maillage . . . . .</b>	<b>231</b>
7.1. Vers une définition de la qualité . . . . .	232
7.2. Processus d'optimisation . . . . .	239
7.2.1. Méthodes globales . . . . .	239
7.2.1.1. Optimisation d'une fonction coût . . . . .	240
7.2.1.2. Relaxation itérative de la position des sommets par dualité (simplexes) . . . . .	240
7.2.1.3. Optimisation globale de la position des sommets (quadrilatères et hexaèdres) . . . . .	241
7.2.2. Opérateurs locaux et méthodes locales . . . . .	242
7.2.2.1. Bougé de sommets par barycentrage . . . . .	243
7.2.2.2. Bougé de sommets et opérateur laplacien . . . . .	244
7.2.2.3. Bougé ou suppression de sommets et bascule par insertion ou réinsertion . . . . .	247
7.2.2.4. Bascule d'arêtes . . . . .	248
7.2.2.5. Bascule d'arêtes par agglomérat . . . . .	249
7.2.2.6. Bascule d'arêtes ou de faces par réinsertion . . . . .	250
7.2.2.7. Découpage d'une arête . . . . .	251
7.2.2.8. Suppression d'une arête par fusion . . . . .	252
7.2.2.9. Mise à jour du champ de métriques . . . . .	252
7.2.2.10. Critères topologiques et critères métriques . . . . .	253
7.2.2.11. Stratégies . . . . .	253
7.3. Maillage plan . . . . .	255
7.4. Maillage surfacique . . . . .	256
7.5. Maillage volumique . . . . .	258
7.6. Maillage de degré élevé . . . . .	261
<b>Chapitre 8. Adaptation de maillage . . . . .</b>	<b>273</b>
8.1. Cadre générique d'un calcul adaptatif, le maillage continu . . . . .	275
8.1.1. Dualité entre entités géométriques discrètes et continues . . . . .	275
8.1.2. Dualité entre erreurs d'interpolation discrètes et continues . . . . .	277
8.1.3. La dualité discret-continu en un schéma . . . . .	280
8.2. Contrôle optimal de l'erreur d'interpolation en norme $L^p$ . . . . .	281
8.3. Schéma générique d'une adaptation stationnaire . . . . .	289

8.3.1. Estimateurs d'erreur . . . . .	290
8.3.2. Interpolation de champs de solutions . . . . .	295
8.4. Adaptation instationnaire . . . . .	297
8.4.1. Estimateurs d'erreur espace-temps basé sur les caractéristiques de la solution . . . . .	298
8.4.2. Extension de l'analyse d'erreur pour l'algorithme de point-fixe pour l'adaptation de maillage instationnaire . . . . .	300
8.4.3. Boucle d'adaptation de maillage pour les problèmes instationnaires . . . . .	301
8.4.4. Adaptation de maillage instationnaire ciblé à une fonctionnelle d'intérêt . . . . .	302
8.4.5. Interpolation conservative de champs de solutions . . . . .	303
8.5. Géométrie mobile sans ou avec déformation . . . . .	306
8.5.1. Contexte général de l'adaptation pour les géométries mobiles et/ou déformables . . . . .	306
8.5.2. Maillage continu optimal ALE minimisant l'erreur d'interpolation en norme $L^p$ . . . . .	307
8.5.3. Estimateur d'erreur espace-temps pour les problèmes à géométrie mobile . . . . .	308
<b>Chapitre 9. Maillage et parallélisme . . . . .</b>	<b>313</b>
9.1. Renumérotation <i>via</i> une courbe de remplissage . . . . .	314
9.2. Parallélisme : deux paradigmes pour la mémoire et différentes stratégies . . . . .	317
9.3. Parallélisation d'un algorithme de construction de maillage . . . . .	323
9.4. Parallélisation d'un processus de construction de maillage, partition puis maillage . . . . .	335
9.5. Parallélisation d'un maillage, maillage puis partition . . . . .	338
<b>Chapitre 10. Applications . . . . .</b>	<b>343</b>
10.1. Maillages de surface . . . . .	344
10.2. En mécanique des fluides . . . . .	346
10.3. En mécanique des solides . . . . .	353
10.4. En électromagnétisme . . . . .	357
10.5. Renumérotation et parallélisme . . . . .	358
10.6. Autres applications plus exotiques . . . . .	362
<b>Chapitre 11. Quelques algorithmes et formules . . . . .</b>	<b>365</b>
11.1. Numérotation locale des nœuds des éléments d'ordre élevé . . . . .	366
11.2. Calcul de longueurs, etc., en présence d'un champ de métriques . . . . .	376
11.3. Qualité . . . . .	381
<b>Conclusions et perspectives . . . . .</b>	<b>385</b>
<b>Bibliographie . . . . .</b>	<b>387</b>
<b>Index . . . . .</b>	<b>399</b>
<b>Sommaire de <i>Maillage, modélisation géométrique et simulation numérique 1</i> . . . . .</b>	<b>403</b>