

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
<b>Introduction</b> . . . . .	3
<b>Chapitre 1. Principes fondamentaux de la mécanique discrète</b> . . . . .	11
1.1. Définitions de la mécanique discrète . . . . .	11
1.1.1. Notion d'espace-temps discret . . . . .	11
1.1.2. Notion de milieu discret . . . . .	14
1.2. Propriétés des opérateurs discrets . . . . .	16
1.3. Invariance en translation et en rotation . . . . .	19
1.4. Principe d'équivalence faible (WEP) . . . . .	21
1.5. Principe d'accumulation des contraintes (CAP) . . . . .	23
1.6. Hypothèse de dualité des actions (DAP) . . . . .	24
1.7. Caractéristiques physiques des milieux . . . . .	26
1.8. Composition des vitesses et des accélérations . . . . .	30
1.9. Courbure discrète . . . . .	33
1.10. Postulats de la mécanique discrète . . . . .	38
<b>Chapitre 2. Conservation de l'accélération</b> . . . . .	41
2.1. Généralités . . . . .	41
2.2. Une mémoire continue . . . . .	44
2.3. Modélisation des contraintes de compression . . . . .	47
2.3.1. Une expérience de compression . . . . .	47
2.3.2. Modélisation des contraintes en solide . . . . .	49
2.3.3. Modélisation des contraintes en fluide . . . . .	49
2.3.4. Compression à faible constante de temps . . . . .	51
2.3.5. Modélisation de l'accumulation des contraintes normales . . . . .	52
2.3.6. La loi $e = m c^2$ . . . . .	53

2.4. Modélisation des contraintes de rotation . . . . .	54
2.4.1. Expérience de Couette . . . . .	54
2.4.2. Comportement dans le temps . . . . .	55
2.4.3. Contrainte de rotation en solide . . . . .	56
2.4.4. Contrainte de rotation en fluide . . . . .	57
2.4.5. Contraintes en milieu poreux, loi de Darcy . . . . .	57
2.4.6. Modélisation de l'accumulation des contraintes de rotation . . . . .	58
2.4.7. Rotation dans les écoulements de Couette et de Poiseuille . . . . .	59
2.5. Modélisation des autres effets . . . . .	60
2.5.1. Effets gravitationnels . . . . .	60
2.5.2. Effets inertiels . . . . .	63
2.6. Équation du mouvement discrète . . . . .	66
2.6.1. Description géométrique . . . . .	67
2.6.2. Dérivation de l'équation du mouvement . . . . .	68
2.6.3. Dissipation de l'énergie . . . . .	71
2.7. Conditions de raccordement . . . . .	73
2.8. Formulation des équations aux discontinuités . . . . .	75
2.9. Autres formes de l'équation du mouvement . . . . .	77
2.9.1. Formulation en rotationnel-potentiel vecteur . . . . .	77
2.9.2. Forme conservative de l'équation du mouvement . . . . .	79
2.10. Modèles incompressibles issus de la formulation discrète . . . . .	80
2.10.1. Méthodes de projection cinématiques . . . . .	80
2.10.2. L'incompressibilité en mécanique discrète . . . . .	84
2.11. Conséquences sur la dynamique de la vortacité . . . . .	85

### **Chapitre 3. Conservation de la masse, du flux et de l'énergie . . . . . 89**

3.1. Conservation de la masse pour un milieu homogène . . . . .	89
3.1.1. En mécanique des milieux continus . . . . .	90
3.1.2. En mécanique discrète . . . . .	92
3.2. Transport dans les mélanges multiconstituants . . . . .	93
3.2.1. Approche classique . . . . .	94
3.2.2. Modèle discret du transport des espèces . . . . .	96
3.2.3. Équilibre d'un mélange binaire . . . . .	99
3.3. Advection . . . . .	101
3.4. Conservation du flux . . . . .	102
3.4.1. Généralités . . . . .	102
3.4.2. Modélisation . . . . .	102
3.5. Conservation de l'énergie . . . . .	105
3.5.1. Conservation de l'énergie totale . . . . .	105
3.5.2. Conservation de l'énergie cinétique . . . . .	106
3.5.3. Conservation de l'énergie interne . . . . .	108
3.5.4. Décroissance de l'énergie cinétique . . . . .	109
3.6. Un système d'équations complet . . . . .	110

3.7. Un simple problème de conduction de la chaleur . . . . .	112
3.7.1. Cas des matériaux anisotropes . . . . .	114
3.8. Changement de phase . . . . .	114
3.8.1. Problème de Stefan . . . . .	115
3.8.2. Condensation . . . . .	121
<b>Chapitre 4. Propriétés de la formulation discrète . . . . .</b>	<b>127</b>
4.1. Propriétés fondamentales . . . . .	127
4.1.1. Limitation de la vitesse . . . . .	127
4.1.2. Inversion des formules $\mathbf{V}_\phi = \nabla\phi$ et $\mathbf{V}_\psi = \nabla \times \psi$ . . . . .	130
4.1.3. Indifférence matérielle . . . . .	133
4.1.4. Invariances fondamentales . . . . .	135
4.2. Système d'équations . . . . .	136
4.3. Différences avec la mécanique des milieux continus . . . . .	138
4.3.1. Différences avec l'équation de Navier-Lamé . . . . .	138
4.3.2. Différences avec l'équation de Navier-Stokes . . . . .	139
4.3.3. Dissipation . . . . .	143
4.3.4. Conditions de compatibilité pour l'équation de Navier-Stokes . . . . .	146
4.4. Quelques solutions analytiques de l'équation du mouvement . . . . .	148
4.4.1. Mouvement de rotation rigide . . . . .	148
4.4.2. Écoulement de Couette plan . . . . .	151
4.4.3. Écoulement de Poiseuille . . . . .	152
4.4.4. Écoulement radial . . . . .	156
4.5. Mouvements incompressibles . . . . .	158
4.5.1. Tourbillon de Green-Taylor . . . . .	158
4.5.2. Cavité entraînée . . . . .	160
4.6. Écoulements compressibles et fluides parfaits . . . . .	162
4.6.1. Lois de Bernoulli généralisées . . . . .	163
4.6.2. Propagation des ondes linéaires . . . . .	165
4.6.3. Tube à choc de Sod . . . . .	167
4.7. Statique des fluides et des solides . . . . .	170
4.8. Condition pour modéliser un solide rigide . . . . .	171
4.9. Écoulements en milieux poreux . . . . .	172
4.10. Étirement de l'espace-temps et théorème d'Hugoniot . . . . .	177
<b>Chapitre 5. Écoulements diphasiques, capillarité et mouillage . . . . .</b>	<b>181</b>
5.1. Formulation des équations aux interfaces . . . . .	181
5.1.1. Modélisation de la courbure . . . . .	182
5.1.2. Formulation de l'équation du mouvement . . . . .	186
5.2. Écoulements diphasiques . . . . .	190
5.2.1. Écoulement de Poiseuille diphasique . . . . .	191
5.2.2. Ballottement de deux fluides immiscibles . . . . .	193
5.3. Écoulements dominés par la capillarité . . . . .	198

5.3.1. Problème de Laplace . . . . .	198
5.3.2. Ellipse en oscillation . . . . .	199
5.3.3. Écoulement de type Marangoni dans une goutte . . . . .	202
5.3.4. Bulles en interaction . . . . .	203
5.3.5. Simulation d'une mousse en équilibre . . . . .	206
5.4. Mouillage partiel . . . . .	207
5.4.1. Goutte en équilibre sur un plan . . . . .	210
5.4.2. Étalement d'une goutte . . . . .	211
5.4.3. Goutte soumise à la gravité . . . . .	215
5.4.4. Écoulement dans une lentille . . . . .	216
5.4.5. Ascension capillaire dans un tube . . . . .	217
<b>Chapitre 6. Contraintes et déplacements dans les solides . . . . .</b>	<b>221</b>
6.1. Milieu solide discret . . . . .	221
6.2. Contraintes dans les solides . . . . .	223
6.2.1. Équations discrètes . . . . .	224
6.2.2. Indifférence matérielle . . . . .	226
6.2.3. Équation de la statique des solides . . . . .	227
6.2.4. Calcul des déplacements . . . . .	229
6.3. Propriétés des milieux solides . . . . .	231
6.3.1. En mécanique des milieux continus . . . . .	232
6.3.2. En mécanique discrète . . . . .	235
6.4. Conditions aux limites . . . . .	237
6.5. Mouvements rigidifiants . . . . .	240
6.6. Validation du modèle sur des exemples . . . . .	243
6.6.1. Un simple exemple de couplage monolithique fluide-solide . . . . .	243
6.6.2. Équilibre mécanique du ballotement . . . . .	245
6.6.3. Poutre en extension . . . . .	247
6.6.4. Compression multimatériau . . . . .	250
6.6.5. Cisaillement plan . . . . .	251
6.6.6. Poutre en flexion . . . . .	251
6.6.7. Écrasement d'un bloc sous l'effet de la gravité . . . . .	253
6.6.8. Équilibre mécanique d'un objet solide . . . . .	255
6.6.9. Extension à d'autres lois de comportement . . . . .	256
6.7. Vers une unification de la mécanique des fluides et des solides . . . . .	258
<b>Chapitre 7. Extensions multiphysiques . . . . .</b>	<b>261</b>
7.1. Déflexion de la lumière . . . . .	261
7.1.1. Le phénomène physique . . . . .	262
7.1.2. Déflexion de la lumière par le soleil en mécanique newtonienne . . . . .	264
7.1.3. Déflexion de la lumière par le soleil par l'action duale . . . . .	268
7.1.4. Déflexion de la lumière par le soleil par une approche 1D . . . . .	269
7.2. Sur une approche discrète de la turbulence . . . . .	274

---

7.2.1. Généralités sur les approches adoptées . . . . .	274
7.2.2. Dynamique de la vorticité en dimension deux d'espace . . . . .	275
7.2.3. Analyse de l'écoulement turbulent en canal plan . . . . .	278
7.2.4. Modélisation de la turbulence en mécanique discrète . . . . .	283
7.2.5. Application à l'écoulement en canal à $Re_\tau = 590$ . . . . .	284
7.3. La cavité entraînée à $Re = 5\,000$ . . . . .	292
7.4. Convection naturelle hors Boussinesq . . . . .	295
7.5. Couplage fluide-solide . . . . .	299
<b>Liste des symboles</b> . . . . .	<b>301</b>
<b>Bibliographie</b> . . . . .	<b>307</b>
<b>Index</b> . . . . .	<b>313</b>