

# Table des matières

<b>Avant-propos</b> . . . . .	1
<b>Partie 1. Introduction</b> . . . . .	3
<b>Chapitre 1. Rappel d’algèbre linéaire</b> . . . . .	5
1.1. Espace vectoriel . . . . .	5
1.1.1. Définitions générales . . . . .	5
1.1.2. Familles libres, génératrices, bases . . . . .	6
1.2. Applications linéaires . . . . .	7
1.3. Matrices . . . . .	9
1.3.1. Opérations sur les matrices . . . . .	9
1.3.2. Matrices de changement de base . . . . .	10
1.3.3. Notations matricielles . . . . .	11
1.4. Déterminants . . . . .	12
1.5. Produit scalaire . . . . .	13
1.6. Norme vectorielle . . . . .	14
1.7. Vecteurs propres et valeurs propres de matrices . . . . .	15
1.7.1. Définitions et propriétés . . . . .	15
1.7.2. Diagonalisation des matrices . . . . .	16
1.7.3. Trigonalisation des matrices . . . . .	17
1.8. Utilisation de Matlab . . . . .	17
<b>Chapitre 2. Précisions numériques</b> . . . . .	21
2.1. Introduction . . . . .	21
2.2. Représentation des nombres en machine . . . . .	21
2.3. Les entiers . . . . .	23
2.3.1. Représentation externe . . . . .	23
2.3.1.1. Conventions d’écriture . . . . .	24

2.3.1.2. Conventions de position . . . . .	24
2.3.2. Représentation interne . . . . .	24
2.4. Les réels . . . . .	24
2.4.1. Représentation externe . . . . .	24
2.4.2. Codage interne des réels . . . . .	25
2.5. Erreurs dues à la représentation . . . . .	25
2.5.1. Propriétés de l'arithmétique de l'ordinateur . . . . .	27
2.5.2. Opération soustraction . . . . .	28
2.5.3. Stabilité . . . . .	29
2.6. Notion du meilleur algorithme . . . . .	29
2.7. Utilisation de Matlab . . . . .	29
2.7.1. Définition des variables . . . . .	29
2.7.2. Manipulation des nombres . . . . .	30
2.7.2.1. Précision numérique . . . . .	32
<b>Partie 2. Approximation des fonctions . . . . .</b>	<b>35</b>
<b>Chapitre 3. Interpolation polynomiale . . . . .</b>	<b>37</b>
3.1. Introduction . . . . .	37
3.2. Problèmes d'interpolation . . . . .	37
3.2.1. Interpolation linéaire . . . . .	38
3.3. Techniques d'interpolation polynomiale . . . . .	38
3.4. Interpolation dans la base de Lagrange . . . . .	39
3.4.1. Erreur d'interpolation polynomiale . . . . .	43
3.4.2. Méthode de Neville-Aitken . . . . .	46
3.5. Interpolation dans la base de Newton . . . . .	47
3.6. Interpolation par fonctions <i>spline</i> . . . . .	49
3.6.1. Interpolation d'Hermite . . . . .	50
3.6.2. Erreur d'interpolation par <i>spline</i> . . . . .	56
3.7. Utilisation de Matlab . . . . .	59
3.7.1. Opérations sur les polynômes . . . . .	59
3.7.1.1. Multiplication des polynômes . . . . .	59
3.7.1.2. Division des polynômes . . . . .	60
3.7.2. Manipulation des polynômes . . . . .	60
3.7.3. Évaluation d'un polynôme . . . . .	61
3.7.4. Interpolation linéaire et non linéaire . . . . .	61
3.7.5. Fonction de Lagrange . . . . .	65
3.7.6. Fonction de Newton . . . . .	66
<b>Chapitre 4. Dérivation numérique . . . . .</b>	<b>69</b>
4.1. Dérivées numériques d'ordre 1 et erreur de troncature . . . . .	69
4.2. Dérivées numériques d'ordre supérieur . . . . .	72
4.3. Dérivées numériques et interpolation . . . . .	73

4.4. Étude de l'erreur de dérivation . . . . .	76
4.5. Extrapolation de Richardson . . . . .	79
4.6. Application à l'équation de la chaleur . . . . .	81
4.7. Utilisation de Matlab . . . . .	84
<b>Chapitre 5. Intégration numérique . . . . .</b>	<b>85</b>
5.1. Introduction . . . . .	85
5.2. Méthode des rectangles . . . . .	86
5.3. Méthode des trapèzes . . . . .	87
5.4. Méthode de Simpson . . . . .	89
5.5. Méthode d'Hermite . . . . .	93
5.6. Méthode de Newton-Côtes . . . . .	94
5.7. Méthode de Gauss-Legendre . . . . .	95
5.7.1. Positionnement du problème . . . . .	95
5.7.2. Polynômes de Legendre . . . . .	97
5.7.3. Choix des $\alpha_i$ et des $x_i$ ( $i = 0, \dots, n$ ) . . . . .	102
5.7.3.1. Choix des $(x_i)$ $i = 0, \dots, n$ . . . . .	102
5.7.3.2. Choix des $(\alpha_i)$ $i = 0, \dots, n$ . . . . .	102
5.8. Utilisation de Matlab . . . . .	103
5.8.1. Fonctions Matlab utilisées pour l'intégration numérique . . . . .	103
5.8.2. Méthode des trapèzes . . . . .	104
5.8.3. Méthode de Simpson . . . . .	106
<b>Partie 3. Résolution des systèmes linéaires . . . . .</b>	<b>109</b>
<b>Chapitre 6. Norme matricielle et conditionnement . . . . .</b>	<b>111</b>
6.1. Introduction . . . . .	111
6.2. Norme matricielle . . . . .	111
6.3. Conditionnement d'une matrice . . . . .	116
6.3.1. Approximation de $K(A)$ . . . . .	119
6.4. Préconditionnement . . . . .	120
6.5. Utilisation de Matlab . . . . .	120
6.5.1. Matrices et vecteurs . . . . .	120
6.5.2. Conditionnement d'une matrice . . . . .	122
<b>Chapitre 7. Méthodes directes . . . . .</b>	<b>127</b>
7.1. Introduction . . . . .	127
7.2. Méthode des déterminants ou méthode de Cramer . . . . .	127
7.2.1. Inversion d'une matrice par la méthode de Cramer . . . . .	128
7.3. Système à matrice triangulaire supérieure . . . . .	128
7.4. Méthode de Gauss . . . . .	129
7.4.1. Résolutions en parallèle . . . . .	133

7.5. Méthode de Gauss-Jordan . . . . .	133
7.5.1. Principe de la méthode . . . . .	133
7.5.2. Calcul de la matrice inverse par l'algorithme de Gauss-Jordan . . . . .	135
7.6. Décomposition LU . . . . .	136
7.7. Algorithme de Thomas . . . . .	138
7.8. Méthode de Cholesky . . . . .	139
7.9. Utilisation de Matlab . . . . .	141
7.9.1. Opérations sur les matrices . . . . .	141
7.9.2. Systèmes d'équations linéaires . . . . .	144
7.9.2.1. Méthode de Cramer . . . . .	144
7.9.2.2. Résolution des systèmes d'équations linéaires . . . . .	145
7.9.2.3. Différentes fonctions . . . . .	146
7.9.2.4. Élimination de Gauss . . . . .	147
7.9.2.5. Méthode de Cholesky . . . . .	150
<b>Chapitre 8. Méthodes itératives . . . . .</b>	<b>153</b>
8.1. Introduction . . . . .	153
8.2. Techniques itératives classiques . . . . .	154
8.2.1. Méthode de Jacobi . . . . .	155
8.2.2. Méthode de Gauss-Seidel . . . . .	157
8.2.3. Méthode de relaxation . . . . .	159
8.2.4. Méthodes de Jacobi, Gauss-Seidel et relaxation, par blocs . . . . .	160
8.3. Convergence des méthodes itératives . . . . .	161
8.4. Méthode du gradient conjugué . . . . .	164
8.5. Utilisation de Matlab . . . . .	165
8.5.1. Méthode de Jacobi . . . . .	166
8.5.2. Méthode de relaxation . . . . .	166
<b>Chapitre 9. Méthodes numériques de calcul des valeurs propres et vecteurs propres . . . . .</b>	<b>169</b>
9.1. Introduction . . . . .	169
9.2. Calcul direct du $\det(A - \lambda I)$ . . . . .	170
9.3. Méthode de Krylov . . . . .	172
9.4. Méthode de Leverrier . . . . .	174
9.5. Méthode de Jacobi . . . . .	175
9.6. Méthode de la puissance itérée . . . . .	177
9.6.1. Algorithme de déflation . . . . .	179
9.7. Méthode de la puissance inverse . . . . .	179
9.8. Méthode de Givens-Householder . . . . .	181
9.8.1. Algorithme de Givens . . . . .	182
9.9. Utilisation de Matlab . . . . .	182
9.9.1. Application au flambement d'une poutre . . . . .	184

---

<b>Chapitre 10. Approximation au sens des moindres carrés</b> . . . . .	191
10.1. Introduction . . . . .	191
10.2. Formulation analytique . . . . .	191
10.3. Formulation algébrique . . . . .	197
10.3.1. Rappels sur la notion d'orthogonalité . . . . .	197
10.3.2. Retour aux moindres carrés . . . . .	198
10.3.3. Résolution par orthogonalisation . . . . .	199
10.4. Résolution numérique par factorisation QR . . . . .	200
10.4.1. Transformation de Householder . . . . .	200
10.4.2. Factorisation QR . . . . .	200
10.4.3. Application aux moindres carrés . . . . .	201
10.5. Applications . . . . .	201
10.5.1. Ajustement des données . . . . .	202
10.5.2. Dérivation approchée . . . . .	202
10.6. Utilisation de Matlab . . . . .	203
<b>Annexe 1. Introduction à Matlab</b> . . . . .	207
<b>Annexe 2. Introduction à l'optimisation</b> . . . . .	217
<b>Bibliographie</b> . . . . .	223
<b>Index</b> . . . . .	225