Avant-propos

Le premier volume [P1] de cet ouvrage a donné les conditions permettant de résoudre un système d'équations, soit polynômiales, avec quelques incursions dans le domaine de la géométrie algébrique, soit, et surtout, différentielles. Mis à part le cas élémentaire des coefficients constants, ces conditions sont restées, il faut l'avouer, formelles, trop formelles, comme Nietzsche eût dit « humain, trop humain ». Le but de ce second volume est revêtir de chair ce squelette. Une première approche consiste à chercher les solutions des équations, dont on suppose que les coefficients appartiennent à un corps $\mathbf{K}$, dans une extension $\mathbf{L}/\mathbf{K}$. S'agissant d'équations polynômiales, on est alors conduit à la théorie de Galois, et s'agissant d'équations différentielles, à la théorie de Galois différentielle (« théorie de Picard-Vessiot », dont la plupart des résultats décisifs sont dus à E. Kolchin) ; il existe un parallèle exact entre ces deux théories. Celle de Galois est exposée en détail dans le chapitre 1, avec une démonstration complète du théorème d'Abel-Ruffini sur l'irrésolubilité par radicaux de l'équation générale du 5$^{\text{e}}$ degré, question qui a torturé l'esprit des mathématiciens durant 3 siècles. Les principaux résultats de la théorie de Galois différentielle s'obtiennent au prix de démonstrations longues et difficiles, aussi les avons-nous le plus souvent omises, les résultats étant justifiés, dans une certaine mesure, par leur pendant dans la théorie de Galois.

Après ce premier chapitre, encore très algébrique, on ne peut plus échapper à l'analyse, et plus précisément à l'analyse fonctionnelle, à condition d'inclure dans la classe des « fonctions » les « fonctions généralisées » au sens où l'entendait I. Gelfand [GEL 68] (c'est-à-dire essentiellement les distributions de Schwartz), voire des objets plus exotiques comme les hyperfonctions de Sato. Ce sont du reste ces dernières qui fourniront le contenu analytique approprié pour les solutions des systèmes d'équations différentielles à coefficients variables, comme on le verra à la section 5.4.6 qui clôt le volume.

Mais avant d'en arriver là, il est nécessaire de poser les bases de l'analyse, et en premier lieu de la topologie, qui fait l'objet du chapitre 2. Les notions élémentaires de topologie dans les espaces métriques sont supposées connues, telles qu'elles sont exposées, par exemple, dans les *Fondements de l'analyse moderne* de J. Dieudonné, (1[er] volume des *Éléments d'Analyse* [DIE 82]). Les espaces de distributions n'étant pas métrisables pour la plupart, force est d'étudier les espaces topologiques généraux et leurs variantes (espaces uniformes, etc.). On sait que dans les espaces métriques, les suites sont un outil précieux pour établir maints résultats ; ce n'est plus le cas dans les espaces non métrisables, où les suites doivent être remplacées par les « suites généralisées », ou « filets » de Moore-Smith, ou par les filtres d'H. Cartan, et c'est leur étude qui ouvre le chapitre 2, montrant en quoi filets et filtres sont des outils équivalents d'un point de vue strictement logique, mais complémentaires au plan psychologique. Il a été jugé utile d'introduire à la section 2.5 la notion de bornologie sur un espace lipschitzien, plutôt que de ne le faire que sur un espace vectoriel topologique localement convexe, notamment parce que la notion d'ensemble borné dans un espace métrique (sans aucune structure vectorielle) est classique, et qu'il est commode de disposer d'un cadre général unique. En topologie notamment, nous avons utilisé force quantificateurs pour ne pas alourdir excessivement le texte (contrevenant à la règle bourbakiste entre autres) et l'avons fait en ajoutant parenthèses et virgules par rapport à l'usage orthodoxe des logiciens, recherchant avant tout la clarté.

Les espaces de « fonctions généralisées » (notons-les E') sont obtenus par dualité avec des espaces de « fonctions test » E. Supposons que E soit l'espace L^2 des fonctions de carré intégrable sur la droite réelle. Puisque E est un espace de Hilbert (théorème 419), il est son propre dual (théorème 383). Si maintenant on choisit un espace de fonctions test E plus petit que L^2, son dual E' sera plus grand, et plus petit est E, plus grand est E'. C'est ce qui a conduit L. Schwartz à retenir $E = \mathcal{D}$, l'espace des fonctions indéfiniment dérivables à support compact. Il existe des fonctions non nulles ayant cette propriété (remarque 477), résultat qui peut sembler étrange au néophyte ; $\mathcal{D}$ est beaucoup plus petit que L^2, donc son dual $\mathcal{D}'$, l'espace des distributions, est beaucoup plus grand.

Les espaces vectoriels topologiques, dont la théorie de la dualité fait partie, sont étudiés au chapitre 3. Les plus importants d'entre eux pour les applications sont ceux qui sont localement convexes, et c'est sur ces espaces, notamment, que la théorie de la dualité se développe de manière naturelle ; c'est donc sur eux que porte l'essentiel de l'exposé. Les deux types d'espaces localement convexes les plus classiques sont les espaces de Banach (c'est-à-dire les espaces vectoriels normés complets) et les espaces de Hilbert qui en sont des cas particuliers. On a dit plus haut que L^2 est un espace de Hilbert. On verra que les espaces L^p $(p \in [1, \infty])$ sont des espaces de Banach. Mais nombre d'espaces dont on souhaite faire ici l'étude ne sont d'aucun de ces types, auxquels on ne peut donc se restreindre. Les espaces de Fréchet et leurs limites inductives, les espaces de Montel et de Schwartz (section 3.4) vont jouer un rôle essentiel ; or les espaces de ces deux derniers types sont tous non métrisables sauf en dimension finie. D'autre part, les « topologies faibles » sont constamment utilisées, par exemple, dans la théorie des distributions, et font donc l'objet d'une étude approfondie à la section 3.5. Les questions de « réflexivité » sont également examinées à la section 3.7 : étant donné un espace E, son bidual (le dual de son dual, lorsque les duals sont munis de la « topologie forte ») lui est-il canoniquement isomorphe ? On sait que si E est un espace de dimension finie, la réponse est positive ([P1], section 3.1.3 (VI), théorème 105). On verra que L^p est réflexif pour tout $p \in \left]1, \infty\right[$, mais ne l'est pas, en général, pour $p = 1$ ou $p = \infty$ (corollaire 424 et remarque 425). Il n'a pas été possible, dans le cadre restreint de ce volume, d'inclure la belle théorie des opérateurs compacts, due à F. Riesz, et les questions connexes (théorie de Fredholm, opérateurs de Hilbert-Schmidt, problème de Sturm-Liouville, etc.), mais le lecteur intéressé peut en trouver un exposé complet dans les *Fondations de l'analyse moderne*. Il n'a pas été possible non plus d'inclure la principale application de la théorie des espaces nucléaires de Grothendieck (section 3.11.3), le théorème des noyaux de Schwartz : voir ([KOT 79], volume II), [SCF 99] ou [TRE 67]. Disons simplement que le théorème des noyaux exprime l'existence d'un isomorphisme canonique $\mathcal{D}'(X \times Y) \cong \mathcal{L}(\mathcal{D}(Y); \mathcal{D}'(X))$ entre l'espace des distributions sur $X \times Y$ (où X et Y sont des ouverts de $\mathbb{R}^n$ et $\mathbb{R}^m$ respectivement) et l'espace des applications linéaires continues de $\mathcal{D}(Y)$ dans $\mathcal{D}'(X)$ (appelé l'espace des distributions sur Y à valeurs dans $\mathcal{D}'(X)$) ; cette propriété reste valide avec $\mathcal{D}$ remplacé par $\mathcal{E}$ et $\mathcal{D}'$ par $\mathcal{E}'$ (voir section 4.3.1). Ce résultat est dû au fait que $\mathcal{D}$ et $\mathcal{E}$ sont des espaces nucléaires et est intimement lié à la théorie de Fredholm [GRO 56].

Muni du bagage des chapitres 2 et 3, il est possible d'aborder l'étude des espaces fonctionnels « généralisés », au chapitre 4. En premier lieu vient la théorie de la mesure et de l'intégration, merveilleux outil forgé par E. Borel, H. Lebesgue et leurs successeurs, sans lequel rien ne serait possible. On y voit apparaître le premier type de « fonctions généralisées » : les mesures de Radon. Il existe deux théories de l'intégration bien distinctes : l'une fondée sur « mesures abstraites », l'autre sur les mesures de Radon. Bourbaki [BKI 69] a choisi la seconde approche, pour des raisons fort valables, et a été vivement critiqué de ce fait, pour des raisons fort valables également, notamment la grande difficulté qu'il y a à construire à partir des mesures de Radon une théorie raisonnable des probabilités ([BKI 69], chapitre IX), [SCW 73]. À la section 4.1, plutôt que de choisir de manière sectaire l'une ou l'autre de ces deux démarches, il a été préféré de montrer leurs relations et d'utiliser, au moment voulu, la plus appropriée. Bien que la théorie des fonctions d'une variable complexe soit traitée dans les *Fondements de l'analyse moderne* (et qu'elle fasse partie de la culture de l'ingénieur), elle est reprise ici, à la section 4.2, à la lumière de la notion d'homologie (suivant la démarche initiée par Ahlfors [AHL 66]), plutôt que de celle d'homotopie utilisée dans les *Fondements*, car outre le fait qu'elle est plus générale ([P1], section 3.3.8 (II)), elle est plus géométrique et, en définitive, plus commode. La notion de fonction méromorphe est détaillée (section 4.2.6) avec les théorèmes de Mittag-Leffler et de Weierstrass (donnés sans démonstration) qui préparent aux considérations du chapitre suivant. Puis, vient l'étude des espaces fonctionnels « classiques » (espaces de fonctions indéfiniment dérivables et de fonctions analytiques) et de leurs duals (distributions et fonctionnelles analytiques, hyperfonctions). On peut voir la théorie des distributions comme incarnant l'aboutissement de la théorie des espaces vectoriels topologiques telle qu'elle s'est développée depuis Hilbert jusque dans les années 1950. M. Sato, quant à lui, a eu l'idée de choisir les fonctions analytiques comme fonctions test dans la construction des hyperfonctions ; mais il n'existe pas de fonction analytique non nulle à support compact, par conséquent la théorie des hyperfonctions ne pouvait pas être une application plus ou moins directe de la théorie « classique » de la dualité. Les hyperfonctions sont des « valeurs aux bords » de fonctions holomorphes, ou encore des espaces de cohomologie à valeurs dans un faisceau de fonctions holomorphes. Par suite, s'il est possible de définir assez simplement les hyperfonctions d'une seule variable (section 4.4.2), il n'est possible d'en comprendre la nature profonde, et d'en envisager la généralisation au cas de plusieurs variables, qu'après avoir étudié la théorie des faisceaux.

Celle-ci, œuvre de J. Leray puis d'H. Cartan, est donc le sujet du dernier chapitre (chapitre 5) ; on y insiste sur les faisceaux de modules sur un espace annelé (section 5.3) et leur cohomologie (section 5.4). Une place privilégiée est accordée, comme il se doit, aux faisceaux algébriques cohérents et aux faisceaux analytiques cohérents, ingrédients indispensables de la géométrie algébrique et de la géométrie analytique respectivement (cette dernière au sens où elle est entendue depuis J.P. Serre). Les deux applications dont il est rendu compte sont les fonctions méromorphes de plusieurs variables (section 5.4.4) et les hyperfonctions (section 5.4.5). Pour finir, il est possible d'appliquer ces dernières aux systèmes d'équations différentielles à coefficients variables et d'obtenir un résultat équivalent (bien que requérant des calculs effectifs beaucoup plus difficiles) à celui obtenu dans ([P1], section 3.4.4) pour les systèmes d'équations différentielles à coefficients constants ; on a adopté dans cette dernière section une démarche heuristique, visant à cerner progressivement le champ des possibles.