

Table des matières

| | |
|--|----|
| Avant-propos | 11 |
| Liste des notations | 15 |
| Chapitre 1. Extensions de corps et de corps différentiels | 25 |
| 1.1. Théorie de Galois | 25 |
| 1.1.1. Introduction | 25 |
| 1.1.2. Vue d'ensemble et terminologie | 27 |
| 1.1.3. Corps de décomposition | 32 |
| 1.1.4. Corps algébriquement clos | 36 |
| 1.1.5. Séparabilité | 37 |
| 1.1.6. Normalité | 45 |
| 1.1.7. Extensions galoisiennes et groupe de Galois | 47 |
| 1.1.8. Théorème fondamental de la théorie de Galois | 48 |
| 1.1.9. Équation binôme | 51 |
| 1.1.10. Résolution par radicaux d'une équation algébrique | 53 |
| 1.1.11. Équation algébrique générale | 55 |
| 1.1.12. Topologie du groupe de Galois | 56 |
| 1.2. Extensions transcendentes | 57 |
| 1.2.1. Extensions pures | 57 |
| 1.2.2. Bases de transcendance | 57 |
| 1.3. Théorie de Galois différentielle | 59 |
| 1.3.1. Introduction | 59 |
| 1.3.2. Extensions de Picard-Vessiot | 61 |
| 1.3.3. Groupes algébriques | 63 |
| 1.3.4. Théorème fondamental de la théorie de Picard-Vessiot | 64 |
| 1.3.5. Adjonctions simples | 66 |
| 1.3.6. Extensions liouviennes et fonctions élémentaires | 67 |

| | |
|---|-----------|
| 1.4. Extensions différentiellement transcendant | 69 |
| 1.4.1. Dépendance différentiellement algébrique | 69 |
| 1.4.2. Degré de transcendance différentielle | 70 |
| Chapitre 2. Topologie générale | 71 |
| 2.1. Introduction à la topologie générale | 71 |
| 2.1.1. Espaces métriques | 71 |
| 2.1.2. Notion de topologie | 72 |
| 2.1.3. Topologie générale <i>versus</i> topologie des espaces métriques | 73 |
| 2.2. Filtres et filets | 75 |
| 2.2.1. Filtres et ultrafiltres | 75 |
| 2.2.2. Filets et ultrafilets | 77 |
| 2.3. Structures topologiques | 80 |
| 2.3.1. Notions élémentaires | 80 |
| 2.3.2. Convergence | 81 |
| 2.3.3. Continuité | 84 |
| 2.3.4. Catégorie des espaces topologiques | 85 |
| 2.3.5. Produits et limites projectives d'espaces topologiques | 86 |
| 2.3.6. Coproduits et limites inductives d'espaces topologiques | 88 |
| 2.3.7. Compacité | 88 |
| 2.3.8. Connexité | 91 |
| 2.3.9. Espaces localement compacts | 92 |
| 2.3.10. Espaces paracompacts | 94 |
| 2.3.11. Espaces normaux | 95 |
| 2.3.12. Partitions continues de l'unité | 96 |
| 2.3.13. Germes d'applications | 96 |
| 2.4. Structures uniformes | 97 |
| 2.4.1. Entourages et topologies uniformisables | 97 |
| 2.4.2. Continuité uniforme | 99 |
| 2.4.3. Familles d'écart et structures lipschitziennes | 100 |
| 2.4.4. Complétude | 102 |
| 2.4.5. Uniformité des espaces compacts | 106 |
| 2.5. Bornologies | 108 |
| 2.5.1. Notion de bornologie | 108 |
| 2.5.2. Compacité dans \mathbb{K}^n | 110 |
| 2.5.3. Bornitude des filtres et des filets | 110 |
| 2.6. Espaces de Baire, polonais, sousliniens et de Lindelöf | 111 |
| 2.6.1. Espaces de Baire et théorie de la catégorie | 111 |
| 2.6.2. Espaces polonais et espaces sousliniens | 112 |
| 2.6.3. Espaces de Lindelöf | 112 |
| 2.7. Espaces uniformes d'applications | 113 |
| 2.7.1. \mathcal{G} -convergence | 113 |
| 2.7.2. Ensembles d'applications continues | 114 |

| | |
|--|------------|
| 2.7.3. Équicontinuité | 115 |
| 2.7.4. Équibornitude | 118 |
| 2.8. Algèbre topologique | 118 |
| 2.8.1. Groupes topologiques | 118 |
| 2.8.2. Groupes topologiques abéliens | 123 |
| 2.8.3. Anneaux et modules topologiques, etc. | 123 |
| Chapitre 3. Espaces vectoriels topologiques | 125 |
| 3.1. Introduction | 125 |
| 3.2. Espaces vectoriels topologiques généraux | 126 |
| 3.2.1. Topologie d'un espace vectoriel topologique | 126 |
| 3.2.2. Catégorie des espaces vectoriels topologiques | 127 |
| 3.2.3. Théorèmes de Riesz et de Banach | 131 |
| 3.3. Espaces localement convexes | 132 |
| 3.3.1. Ensembles et fonctions convexes | 132 |
| 3.3.2. Semi-normes | 134 |
| 3.3.3. Topologies localement convexes | 135 |
| 3.3.4. Théorème de Hahn-Banach | 136 |
| 3.3.5. Catégorie des espaces localement convexes | 138 |
| 3.3.6. Ensembles bornés | 139 |
| 3.3.7. Sommes directes topologiques et limites inductives | 140 |
| 3.3.8. \mathcal{G} -topologie de $\mathcal{L}(E; F)$ | 142 |
| 3.4. Types importants d'espaces localement convexes | 143 |
| 3.4.1. Espaces de Banach | 143 |
| 3.4.2. Espaces de Fréchet | 146 |
| 3.4.3. Espaces tonnelés | 147 |
| 3.4.4. Espaces bornologiques et espaces ultrabornologiques | 150 |
| 3.4.5. Espaces de Montel | 152 |
| 3.4.6. Espaces de Schwartz | 152 |
| 3.5. Topologies faibles | 155 |
| 3.5.1. Systèmes duals | 155 |
| 3.5.2. Bipolaires | 156 |
| 3.5.3. Transposée d'une application linéaire | 157 |
| 3.6. Dual d'un espace localement convexe | 159 |
| 3.6.1. Notion d'espace dual | 159 |
| 3.6.2. Topologie $*$ -faible sur E' | 160 |
| 3.6.3. Topologies compatibles avec la dualité | 161 |
| 3.6.4. Autres topologies sur E' | 162 |
| 3.6.5. Espaces de Riesz | 165 |
| 3.7. Bidual et réflexivité | 166 |
| 3.7.1. Plongement de E dans son bidual | 166 |
| 3.7.2. Espaces semi-réflexifs | 166 |
| 3.7.3. Espaces réflexifs | 167 |

| | |
|---|-----|
| 3.7.4. Dualité dans les espaces de Banach | 169 |
| 3.7.5. Dual fort d'un espace de Montel | 170 |
| 3.8. Compléments sur les espaces (\mathcal{F}) ou (\mathcal{FS}) et leurs duals | 171 |
| 3.8.1. Morphismes stricts d'espaces de Fréchet | 171 |
| 3.8.2. Morphismes stricts d'espaces (\mathcal{FS}) ou d'espaces de Silva | 172 |
| 3.9. Applications multilinéaires continues | 175 |
| 3.9.1. Applications bilinéaires continues | 175 |
| 3.9.2. Applications bilinéaires hypocontinues | 176 |
| 3.9.3. Applications multilinéaires bornées | 177 |
| 3.10. Notions d'analyse hilbertienne | 179 |
| 3.10.1. Espaces préhilbertiens | 179 |
| 3.10.2. Espaces de Hilbert | 180 |
| 3.10.3. Opérateurs dans les espaces de Hilbert | 187 |
| 3.11. Applications nucléaires – Espaces nucléaires | 191 |
| 3.11.1. Topologies des produits tensoriels | 191 |
| 3.11.2. Applications nucléaires | 192 |
| 3.11.3. Espaces nucléaires | 193 |

Chapitre 4. Mesure et intégration, espaces fonctionnels 195

| | |
|--|-----|
| 4.1. Mesure et intégration | 195 |
| 4.1.1. Mesures « abstraites » | 196 |
| 4.1.2. Intégration et espaces L^p | 199 |
| 4.1.3. Produit tensoriel de mesures | 203 |
| 4.1.4. Espaces de fonctions continues | 205 |
| 4.1.5. Mesures de Radon | 206 |
| 4.1.6. Intégrale par rapport à une mesure de Radon | 210 |
| 4.1.7. Fonctions absolument continues | 213 |
| 4.1.8. Sommes continues d'espaces de Hilbert | 217 |
| 4.2. Fonctions d'une variable complexe | 218 |
| 4.2.1. Fonctions holomorphes d'une variable complexe | 218 |
| 4.2.2. Homologie – Théorème de Cauchy | 219 |
| 4.2.3. Formules intégrales de Cauchy | 221 |
| 4.2.4. Fonctions analytiques d'une variable complexe | 222 |
| 4.2.5. Théorème des résidus | 223 |
| 4.2.6. Fonctions méromorphes | 224 |
| 4.2.7. Principe de l'argument | 226 |
| 4.3. Espaces fonctionnels | 227 |
| 4.3.1. Espaces de fonctions indéfiniment dérivables | 227 |
| 4.3.2. Espaces de fonctions analytiques | 230 |
| 4.4. Espaces de fonctions généralisées | 234 |
| 4.4.1. Distributions | 234 |
| 4.4.2. Hyperfonctions sur la droite réelle | 239 |

| | |
|--|-----|
| Chapitre 5. Faisceaux | 247 |
| 5.1. Introduction | 247 |
| 5.2. Généralités sur les faisceaux | 248 |
| 5.2.1. Préfaisceaux | 248 |
| 5.2.2. Faisceaux | 250 |
| 5.2.3. Espaces fibrés et espaces étalés | 255 |
| 5.2.4. Exemples | 258 |
| 5.2.5. Faisceaux de germes d'homomorphismes | 259 |
| 5.2.6. Limites projectives de faisceaux | 259 |
| 5.2.7. Limites inductives de faisceaux | 261 |
| 5.2.8. Faisceaux à valeurs dans une catégorie abélienne | 262 |
| 5.3. Faisceaux de Modules | 263 |
| 5.3.1. Modules sur un espace annelé | 263 |
| 5.3.2. Faisceaux cohérents | 265 |
| 5.3.3. Exemples de faisceaux cohérents | 268 |
| 5.4. Cohomologie des faisceaux | 271 |
| 5.4.1. Faisceaux acycliques, fins, mous, flasques | 271 |
| 5.4.2. Cohomologie des faisceaux cohérents | 273 |
| 5.4.3. Cohomologie relative | 275 |
| 5.4.4. Fonctions méromorphes de plusieurs variables | 278 |
| 5.4.5. Faisceau des hyperfonctions | 282 |
| 5.4.6. Application aux systèmes d'équations différentielles linéaires | 284 |
| Bibliographie | 291 |
| Liste des auteurs cités | 297 |
| Index | 305 |
| Sommaire <i>Précis de mathématiques approfondies et fondamentales 1</i> | 317 |