

Préface

« Ô récompense après une pensée
Qu'un long regard sur le calme des dieux ! »

Paul Valéry

Le but de cet ouvrage, qui comprend trois volumes dont celui-ci est le premier, est d'exposer des éléments mathématiques qui « fondent » un certain nombre de méthodes, non seulement de la théorie moderne des systèmes, mais aussi des mathématiques, de la physique et de nombreuses sciences de l'ingénieur. En ce sens, ces mathématiques sont donc « fondamentales ». Elles sont « approfondies » dans la mesure où elles supposent du lecteur qu'il a assimilé l'essentiel des mathématiques enseignées au niveau M1 ou dans la plupart des écoles d'ingénieurs françaises. Le *Cours d'algèbre* de R. Godement [GOD 64] et les *Fondements de l'analyse moderne* de J. Dieudonné (1^{er} volume des *Éléments d'analyse* [DIE 82]) fournissent plus que largement les prérequis nécessaires. La contrainte initiale étant de se tenir à un volume limité, il n'a jamais été question – et cela aurait dépassé de très loin les capacités de l'auteur – de rédiger une encyclopédie des mathématiques, même en excluant, comme on l'a fait ici – sauf exception – celles découvertes (ou inventées, suivant le point de vue épistémologique adopté) durant ces 50 dernières années (et dont l'exposition demanderait une trop grande technicité). D'ailleurs une telle encyclopédie existe, du moins pour partie (car si elle les déborde très largement, par ailleurs elle ne recouvre pas tous les sujets abordés ici), ce sont les *Éléments de mathématique* de N. Bourbaki, œuvre monumentale à laquelle nous nous référerons abondamment. Néanmoins, il est vite apparu que cet ouvrage ne pouvait être un simple formulaire ou fascicule de résultats (ce que l'auteur avait pourtant envisagé au départ), qui ne pourrait rien faire *comprendre*. D'où le choix d'un exposé présentant les notions et résultats de manière cohérente, sans pourtant s'astreindre à *tout* démontrer, comme dans un véritable traité, donc en passant sous silence les longues démonstrations, surtout lorsque (de l'opinion de l'auteur) elles apportent peu à la compréhension, ou lorsqu'elles sortent du cadre alloué. Il pourra arriver qu'un résultat soit simplement justifié par un exemple. Bien

entendu, à chaque fois qu'une démonstration est omise, une référence (d'accès aussi aisé que possible) est indiquée. De nombreuses démonstrations faciles sont proposées en **exercice**, d'autres, un peu plus difficiles mais néanmoins à la portée du lecteur (à condition peut-être de prendre un papier et un crayon), en tant qu'« exercices étoilés » (signalés par la mention **exercice*** et complétés par une référence). Pour certains points, nous avons renvoyé à un bon article de Wikipédia (que nous ne garantissons que dans la version française).

Chaque volume est divisé en chapitres, paragraphes et numéros ; paragraphes et numéros sont appelés « sections » de manière plus générique : la section 3.2.4 désigne le 4^e numéro du second paragraphe du 3^e chapitre. Pour faciliter les renvois et la tâche du lecteur, les numéros les plus longs sont divisés en parties repérées par des chiffres romains majuscules bleus entre parenthèses. Dans tout l'ouvrage, les trois volumes sont référencés par [P1], [P2], [P3], respectivement.

Le présent volume débute par la théorie des catégories (section 1.1). La catégorie des ensembles étant d'une importance toute particulière, quelques indications sont données (dans une approche non bourbakiste¹) dans la section 1.1.2 sur la théorie de Zermelo-Fraenkel et sur l'axiome du choix, ainsi que sur la théorie des ordinaux et des cardinaux, utilisée par la suite pour des raisonnements par récurrence transfinie et l'arithmétique des cardinaux. Le chapitre 2 présente de manière assez classique les structures algébriques générales (monoïdes, groupes, anneaux, etc.) et une classification des anneaux en fonction des propriétés de leurs idéaux (anneaux simples, artiniens, noethériens, bézoutiens, factoriels, principaux, etc.). Le chapitre 3, plus détaillé, traite des modules et algèbres (celles-ci étant un cas particulier de ceux-là). Pour l'essentiel, les modules considérés sont définis sur des anneaux non commutatifs. La raison principale en est que les systèmes d'équations différentielles linéaires à coefficients variables sont modélisés à l'aide d'opérateurs différentiels qui ne commutent pas entre eux (théorie des $\mathcal{D}$ -modules [BJÖ 79, COU 95, KAS 95, MAI 93]). En mathématiques, le non commutatif contient le commutatif, et nous ne nous sommes donc nullement privé, au passage, de développer quelques points d'algèbre commutative (localisation, décomposition primaire, *Nullstellensatz*, etc.) tout en précisant leur signification en théorie des nombres et en géométrie algébrique (sections 3.2.2 et 3.2.7). Enfin, des notions fondamentales d'algèbre homologique ont été précisées (modules injectifs et cogénérateurs, complexes, homotopie, foncteurs dérivés, etc.), ce qui a conduit à faire quelques allusions à la topologie algébrique (section 3.3.8). Le cadre restreint de cet ouvrage n'a pas permis de placer l'étude des foncteurs dérivés dans le contexte général des catégories dérivées (voir [GEL 03] ou [KAS 06]). Le volume se termine avec la théorie, dans le cas non commutatif, des facteurs invariants et de

1. Pour Bourbaki, peut-on dire, « au commencement était l'opération de Hilbert », comme on peut le voir dans ([BKI 70], chapitre I, section 1.1). Ce point de vue est contesté : voir *infra*, section 1.1.2, ainsi que [FRO 83] et (sur un mode plus polémique) [MAT 92].

la forme canonique rationnelle d'une matrice, ainsi que (dans le cas commutatif cette fois) la théorie des diviseurs élémentaires et la forme de Jordan ; enfin, pour conclure, le théorème de structure des modules sur les anneaux de Dedekind. Ces notions d'algèbre homologique et ces théorèmes de structure jouent un rôle essentiel en analyse algébrique (théorie analytico-algébrique des systèmes² d'équations différentielles linéaires, ordinaires ou aux dérivées partielles), qui a donc de nombreux points communs ou de contact avec des méthodes de la géométrie algébrique (outre les références déjà citées sur la théorie des $\mathcal{D}$ -modules, voir notamment [EHR 70, PAL 70]). Le cas élémentaire des systèmes d'équations différentielles ordinaires linéaires à coefficients constants est détaillé à la section 3.4.4.

2. Le terme « système » est entendu ici au sens des mathématiques. Au sens de l'automatique, l'existence de *cas concrets* de « systèmes multidimensionnels » (sans conditions aux limites et à variables de commandes réparties) n'est pas attestée et fait l'objet, depuis 1990, tour à tour d'affirmations, de dénégations et de controverses.