

# Table des matières

<b>Avant-propos</b>	<b>9</b>
<b>1 Prérequis</b>	<b>11</b>
1.1 Algèbre tensorielle	11
1.1.1 Composantes contravariantes, covariantes d'un vecteur	11
1.1.2 Base duale	12
1.1.3 Différentes représentations d'un vecteur	13
1.1.4 Résultats liés à l'orientation de l'espace de dimension 3	14
1.1.5 Tenseur	15
1.1.6 Tenseur métrique	18
1.1.7 Produit tensoriel	19
1.1.8 Base tensorielle – Les différentes représentations d'un tenseur	20
1.1.9 Contraction – Produit contracté	22
1.1.10 Résultats spécifiques aux tenseurs d'ordre 2	25
1.1.11 Résultats spécifiques aux tenseurs d'ordre 4	28
1.2 Analyse tensorielle	28
1.2.1 Coordonnées curvilignes	29
1.2.2 Base naturelle – Repère naturel	30
1.2.3 Dérivées des vecteurs de la base naturelle – Symboles de Christoffel	30
1.2.4 Dérivées covariantes	31
1.2.5 Expressions des opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes	32
<b>2 Position initiale d'une plaque</b>	<b>35</b>
2.1 Position initiale de la surface moyenne de la plaque	35
2.1.1 Définitions	35
2.1.2 Première forme fondamentale de $S_0$ – Base primale et base duale	37
2.2 Position initiale de la plaque	41
2.2.1 Définitions	41
2.2.2 Base naturelle covariante et base duale	43
2.2.3 Formule de Gauss	45
2.3 Dérivée covariante sur une surface	46
2.4 Théorème de la divergence	48
<b>3 Théorie des plaques de Cosserat</b>	<b>49</b>
3.1 Position actuelle de la surface moyenne de la plaque	50
3.2 Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement	51
3.3 Gradient du déplacement	58

3.4	Tenseur de déformation . . . . .	59
3.5	Champ des vitesses . . . . .	62
3.6	Principe des puissances virtuelles (PPV) . . . . .	62
3.7	Champ des vitesses virtuelles . . . . .	62
3.8	Gradient de la vitesse virtuelle . . . . .	63
3.9	Puissance virtuelle des quantités d'accélération . . . . .	63
3.10	Puissance virtuelle des efforts internes . . . . .	64
3.11	Puissance virtuelle des efforts externes . . . . .	66
3.11.1	Puissance virtuelle des forces de volume . . . . .	67
3.11.2	Puissance virtuelle des forces sur les faces supérieure et inférieure . . . . .	68
3.11.3	Puissance virtuelle des forces sur le bord . . . . .	69
3.11.4	En résumé . . . . .	71
3.12	Equations locales du mouvement et conditions aux limites . . . . .	72
3.13	Cas de la statique . . . . .	73
3.14	Une autre façon d'obtenir les équations . . . . .	74
3.15	Bilan des équations et des inconnues . . . . .	77
<b>4</b>	<b>Théorie des plaques de Reissner-Mindlin</b>	<b>79</b>
4.1	Position actuelle de la surface moyenne de la plaque . . . . .	79
4.2	Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement . . . . .	80
4.3	Gradient du déplacement . . . . .	85
4.4	Tenseur de déformation . . . . .	85
4.5	Champ des vitesses . . . . .	87
4.6	Champ des vitesses virtuelles . . . . .	89
4.7	Puissance virtuelle des quantités d'accélération . . . . .	90
4.8	Puissance virtuelle des efforts internes . . . . .	90
4.9	Puissance virtuelle des efforts externes . . . . .	90
4.10	Equations locales de la dynamique et conditions aux limites . . . . .	91
4.11	Remarques sur les couples . . . . .	92
4.12	Cas de la statique . . . . .	93
4.13	Bilan des équations et des inconnues . . . . .	93
<b>5</b>	<b>Théorie des plaques de Kirchhoff-Love</b>	<b>95</b>
5.1	Position actuelle de la surface moyenne de la plaque . . . . .	95
5.1.1	Première forme fondamentale de $S$ – Base primale et base duale . . . . .	96
5.1.2	Deuxième forme fondamentale de $S$ – Tenseur courbure de $S$ . . . . .	97
5.1.3	Troisième forme fondamentale de $S$ . . . . .	101
5.2	Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement . . . . .	101
5.3	Tenseur de déformation . . . . .	106
5.4	Champ des vitesses . . . . .	108
5.5	Champ des vitesses virtuelles . . . . .	108
5.6	Puissance virtuelle des quantités d'accélération . . . . .	109
5.7	Puissance virtuelle des efforts internes . . . . .	110
5.8	Puissance virtuelle des efforts externes . . . . .	117
5.9	Equations locales de la dynamique et conditions aux limites . . . . .	123
5.10	Cas de la statique . . . . .	126
5.11	Bilan des équations et des inconnues . . . . .	126
5.12	Exemple : plaque de Kirchhoff-Love en flexion cylindrique . . . . .	127
5.12.1	Problème posé . . . . .	127
5.12.2	Mise en équations . . . . .	128

5.12.3 Comparaison avec la poutre de Bernoulli en flexion finie . . . . .	131
5.12.4 Cas de la plaque inextensible . . . . .	132
<b>6 Loi de comportement des plaques</b>	<b>141</b>
6.1 Loi de comportement hyperélastique 3D . . . . .	142
6.1.1 Matériau de Saint Venant-Kirchhoff . . . . .	143
6.1.2 Matériau néo-Hookéen . . . . .	144
6.2 Déformations en fonction de la cote $Z$ . . . . .	145
6.3 Contraintes intégrées pour les plaques de Cosserat . . . . .	146
6.4 Hypothèse de la contrainte normale nulle $\sigma^{33} = 0$ . . . . .	149
6.5 Etat de contrainte plane . . . . .	150
6.6 Loi de comportement réduite . . . . .	153
6.6.1 Matériau de Saint Venant-Kirchhoff . . . . .	153
6.6.2 Matériau néo-Hookéen . . . . .	156
6.7 Contraintes intégrées pour les plaques de Reissner-Mindlin . . . . .	158
6.8 Contraintes intégrées pour les plaques de Kirchhoff-Love . . . . .	160
6.9 Revue des hypothèses utilisées . . . . .	165
6.9.1 Hypothèses adoptées dans la mise en équation par le PPV . . . . .	165
6.9.2 Hypothèses pour établir la loi de comportement réduite . . . . .	166
6.9.3 Hypothèses pour établir les lois de comportement intégrées . . . . .	166
6.9.4 Remarques supplémentaires sur quelques hypothèses courantes . . . . .	167
<b>7 Théorie linéarisée des plaques de Kirchhoff-Love</b>	<b>169</b>
7.1 Problème posé . . . . .	169
7.2 Principe de la linéarisation . . . . .	172
7.3 Linéarisation des vecteurs de la base naturelle actuelle . . . . .	176
7.3.1 Expression du vecteur $\mathbf{a}_\alpha$ . . . . .	176
7.3.2 Vecteur normal actuel $\mathbf{a}_3$ linéarisé . . . . .	177
7.3.3 Vecteur $\mathbf{a}^\alpha$ linéarisé . . . . .	178
7.4 Courbures actuelles linéarisées . . . . .	179
7.5 Symboles de Christoffel actuels linéarisés . . . . .	179
7.6 Tenseur de déformation linéarisé . . . . .	179
7.7 Lois de comportement intégrées linéarisées . . . . .	180
7.8 Equations locales linéarisées et conditions aux limites linéarisées – Vibrations d'une plaque précontrainte . . . . .	182
7.9 Bilan des équations et des inconnues . . . . .	188
7.10 Equations aux déplacements . . . . .	188
7.10.1 Les conditions aux limites courantes en termes de $W$ . . . . .	191
7.10.2 Résolution . . . . .	192
7.11 Equilibre d'une plaque précontrainte . . . . .	193
7.12 Problème de flambement d'une plaque . . . . .	195
7.13 Exemple : flambement d'une plaque rectangulaire appuyée sur le bord . . . . .	196
7.14 Exemple : flambement d'une plaque circulaire . . . . .	199
7.14.1 Plaque circulaire encastree . . . . .	199
7.14.2 Plaque circulaire simplement appuyée . . . . .	204
<b>Annexe Quelques relations mécaniques en coordonnées curvilignes 3D</b>	<b>207</b>
<b>Bibliographie</b>	<b>211</b>
<b>Index</b>	<b>213</b>