

Table des matières

Avant-propos	9
1 Prérequis	11
1.1 Algèbre tensorielle	11
1.1.1 Composantes contravariantes, covariantes d'un vecteur	11
1.1.2 Base duale	12
1.1.3 Différentes représentations d'un vecteur	13
1.1.4 Résultats liés à l'orientation de l'espace de dimension 3	14
1.1.5 Tenseur	15
1.1.6 Tenseur métrique	18
1.1.7 Produit tensoriel	19
1.1.8 Base tensorielle – Les différentes représentations d'un tenseur	20
1.1.9 Contraction – Produit contracté	22
1.1.10 Résultats spécifiques aux tenseurs d'ordre 2	25
1.1.11 Résultats spécifiques aux tenseurs d'ordre 4	28
1.2 Analyse tensorielle	28
1.2.1 Coordonnées curvilignes	29
1.2.2 Base naturelle – Repère naturel	30
1.2.3 Dérivées des vecteurs de la base naturelle – Symboles de Christoffel	30
1.2.4 Dérivées covariantes	31
1.2.5 Expressions des opérateurs différentiels en coordonnées curvilignes	32
2 Position initiale d'une plaque	35
2.1 Position initiale de la surface moyenne de la plaque	35
2.1.1 Définitions	35
2.1.2 Première forme fondamentale de S_0 – Base primale et base duale	37
2.2 Position initiale de la plaque	41
2.2.1 Définitions	41
2.2.2 Base naturelle covariante et base duale	43
2.2.3 Formule de Gauss	45
2.3 Dérivée covariante sur une surface	46
2.4 Théorème de la divergence	48
3 Théorie des plaques de Cosserat	49
3.1 Position actuelle de la surface moyenne de la plaque	50
3.2 Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement	51
3.3 Gradient du déplacement	58

3.4	Tenseur de déformation	59
3.5	Champ des vitesses	62
3.6	Principe des puissances virtuelles (PPV)	62
3.7	Champ des vitesses virtuelles	62
3.8	Gradient de la vitesse virtuelle	63
3.9	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	63
3.10	Puissance virtuelle des efforts internes	64
3.11	Puissance virtuelle des efforts externes	66
3.11.1	Puissance virtuelle des forces de volume	67
3.11.2	Puissance virtuelle des forces sur les faces supérieure et inférieure	68
3.11.3	Puissance virtuelle des forces sur le bord	69
3.11.4	En résumé	71
3.12	Equations locales du mouvement et conditions aux limites	72
3.13	Cas de la statique	73
3.14	Une autre façon d'obtenir les équations	74
3.15	Bilan des équations et des inconnues	77
4	Théorie des plaques de Reissner-Mindlin	79
4.1	Position actuelle de la surface moyenne de la plaque	79
4.2	Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement	80
4.3	Gradient du déplacement	85
4.4	Tenseur de déformation	85
4.5	Champ des vitesses	87
4.6	Champ des vitesses virtuelles	89
4.7	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	90
4.8	Puissance virtuelle des efforts internes	90
4.9	Puissance virtuelle des efforts externes	90
4.10	Equations locales de la dynamique et conditions aux limites	91
4.11	Remarques sur les couples	92
4.12	Cas de la statique	93
4.13	Bilan des équations et des inconnues	93
5	Théorie des plaques de Kirchhoff-Love	95
5.1	Position actuelle de la surface moyenne de la plaque	95
5.1.1	Première forme fondamentale de S – Base primale et base duale	96
5.1.2	Deuxième forme fondamentale de S – Tenseur courbure de S	97
5.1.3	Troisième forme fondamentale de S	101
5.2	Position actuelle de la plaque – Champ de déplacement	101
5.3	Tenseur de déformation	106
5.4	Champ des vitesses	108
5.5	Champ des vitesses virtuelles	108
5.6	Puissance virtuelle des quantités d'accélération	109
5.7	Puissance virtuelle des efforts internes	110
5.8	Puissance virtuelle des efforts externes	117
5.9	Equations locales de la dynamique et conditions aux limites	123
5.10	Cas de la statique	126
5.11	Bilan des équations et des inconnues	126
5.12	Exemple : plaque de Kirchhoff-Love en flexion cylindrique	127
5.12.1	Problème posé	127
5.12.2	Mise en équations	128

5.12.3 Comparaison avec la poutre de Bernoulli en flexion finie	131
5.12.4 Cas de la plaque inextensible	132
6 Loi de comportement des plaques	141
6.1 Loi de comportement hyperélastique 3D	142
6.1.1 Matériau de Saint Venant-Kirchhoff	143
6.1.2 Matériau néo-Hookéen	144
6.2 Déformations en fonction de la cote Z	145
6.3 Contraintes intégrées pour les plaques de Cosserat	146
6.4 Hypothèse de la contrainte normale nulle $\sigma^{33} = 0$	149
6.5 Etat de contrainte plane	150
6.6 Loi de comportement réduite	153
6.6.1 Matériau de Saint Venant-Kirchhoff	153
6.6.2 Matériau néo-Hookéen	156
6.7 Contraintes intégrées pour les plaques de Reissner-Mindlin	158
6.8 Contraintes intégrées pour les plaques de Kirchhoff-Love	160
6.9 Revue des hypothèses utilisées	165
6.9.1 Hypothèses adoptées dans la mise en équation par le PPV	165
6.9.2 Hypothèses pour établir la loi de comportement réduite	166
6.9.3 Hypothèses pour établir les lois de comportement intégrées	166
6.9.4 Remarques supplémentaires sur quelques hypothèses courantes	167
7 Théorie linéarisée des plaques de Kirchhoff-Love	169
7.1 Problème posé	169
7.2 Principe de la linéarisation	172
7.3 Linéarisation des vecteurs de la base naturelle actuelle	176
7.3.1 Expression du vecteur \mathbf{a}_α	176
7.3.2 Vecteur normal actuel \mathbf{a}_3 linéarisé	177
7.3.3 Vecteur \mathbf{a}^α linéarisé	178
7.4 Courbures actuelles linéarisées	179
7.5 Symboles de Christoffel actuels linéarisés	179
7.6 Tenseur de déformation linéarisé	179
7.7 Lois de comportement intégrées linéarisées	180
7.8 Equations locales linéarisées et conditions aux limites linéarisées – Vibrations d'une plaque précontrainte	182
7.9 Bilan des équations et des inconnues	188
7.10 Equations aux déplacements	188
7.10.1 Les conditions aux limites courantes en termes de W	191
7.10.2 Résolution	192
7.11 Equilibre d'une plaque précontrainte	193
7.12 Problème de flambement d'une plaque	195
7.13 Exemple : flambement d'une plaque rectangulaire appuyée sur le bord	196
7.14 Exemple : flambement d'une plaque circulaire	199
7.14.1 Plaque circulaire encastree	199
7.14.2 Plaque circulaire simplement appuyée	204
Annexe Quelques relations mécaniques en coordonnées curvilignes 3D	207
Bibliographie	211
Index	213