

Table des matières

Avant-propos	9
Introduction	13
Chapitre 1. Rappels d'algèbre linéaire	19
1.1. Espaces vectoriels	19
1.1.1. Définition	19
1.1.2. Base algébrique d'espaces vectoriels	20
1.2. Applications linéaires	21
1.2.1. Définition	21
1.2.2. Injections, surjections, identification	22
1.2.3. Dualité algébrique	23
1.2.4. Espace des fonctions nulles partout sauf en un nombre fini de points	25
1.3. Partition, espace vectoriel quotient	26
1.3.1. Partition et relation d'équivalence	26
1.3.2. Espace vectoriel quotient	28
1.4. Applications multilinéaires antisymétriques	31
1.4.1. Permutations	31
1.4.2. Application multilinéaire alternée	32
1.4.3. Identification des applications bilinéaires	34
Chapitre 2. Construction des algèbres extérieures	37
2.1. Existence	37
2.1.1. Énoncé du théorème de construction	37
2.1.2. Démonstration pour $p = 2$	38
2.1.3. Démonstration pour $p > 2$	41

2.2. Unicité de l'algèbre extérieure de degré p	45
2.3. Quelques remarques	46
Chapitre 3. Le symbole de produit extérieur	49
3.1. Le symbole de produit extérieur $\wedge$ entre algèbres extérieures	49
3.1.1. Principe de construction	49
3.1.2. Propriétés	51
3.1.3. Algèbre de Grassmann	53
3.2. Symbole de produit extérieur « $\wedge^*$ » entre formes	55
3.2.1. Principe de construction	55
3.2.2. Propriétés élémentaires du symbole de produit extérieur entre formes	56
3.2.3. Caractérisation des familles libres	59
Chapitre 4. Bases des algèbres extérieures	63
4.1. Construction des bases	63
4.1.1. Famille génératrice des algèbres extérieures	63
4.1.2. Famille libre des algèbres extérieures	65
4.1.3. Algèbre de Grassman en dimension finie	67
4.2. Identifier le dual de $\Lambda^p E$	68
4.2.1. Identification des formes 2-linéaires alternées sur $\mathbb{R}^3$	68
4.2.2. Base des formes p -linéaires alternées sur E^p	69
4.2.3. Forme antisymétrique et espace dual	70
4.2.4. Structure du dual : cas de la dimension finie	71
Chapitre 5. Les déterminants	73
5.1. Déterminant des familles de vecteurs	73
5.1.1. Définition et calcul	73
5.1.2. Composantes du produit extérieur	75
5.1.3. Propriétés des déterminants	76
5.2. Calcul pratique des déterminants	78
5.2.1. Déterminant transposé	78
5.2.2. Présentation matricielle des calculs de déterminant	79
5.2.3. Développement de Laplace selon une ligne ou une colonne	80
5.2.4. Développement par blocs	81
5.2.5. Développement utilisant l'associativité	82
5.2.5.1. Cas de la dimension trois	82
5.2.5.2. Cas de la dimension quatre	84
5.3. Solutions des systèmes linéaires	85

5.3.1. Formules de Cramer	85
5.3.2. Théorème de Rouché-Fontené	86
5.3.3. Exemple	89
Chapitre 6. Pseudo-produits scalaires	93
6.1. Formes quadratiques et formes bilinéaires symétriques	93
6.1.1. Définition, correspondance	93
6.1.2. Le signe des formes : de la possibilité de restreindre les formes aux sous-espaces	96
6.1.3. Représentation utilisant les formes non dégénérées	98
6.2. Orthogonalité	101
6.2.1. Définition, propriétés élémentaires	101
6.2.2. Existence et construction des bases orthonormées	103
6.2.3. Signature d'une forme quadratique non dégénérée	108
Chapitre 7. Algèbres pseudo-euclidiennes	111
7.1. Pseudo-produit scalaire sur $\Lambda^p E$	111
7.1.1. Construction	111
7.1.2. Calculs et applications	114
7.2. Applications : volumes et volumes infinitésimaux	117
7.2.1. Mesure du parallélotope	117
7.2.2. Mesure du simplexe	119
7.2.3. Utilisation des coordonnées du vecteur de produit extérieur	122
7.2.4. Mesure « infinitésimale » d'objets classiques	123
Chapitre 8. Divisibilité et décomposabilité	125
8.1. Le produit de contraction	125
8.1.1. Définition	125
8.1.2. Formules de calcul	126
8.2. Divisibilité par les k -blades	129
8.2.1. Cas général	129
8.2.2. Division vectorielle extérieure	131
8.3. Décomposabilité	132
Chapitre 9. H-conjugaison et produit régressif	135
9.1. Introduction à la H-conjugaison	135
9.1.1. Définition	135
9.1.2. Propriétés élémentaires de la H-conjugaison	141

9.1.3. De la confusion du produit vectoriel dans les espaces de dimension trois	143
9.1.4. Démonstration des règles de calculs de déterminant	145
9.2. Le produit régressif	146
9.2.1. Définition	146
9.2.2. Quelques formules de calculs	149

Chapitre 10. Endomorphisme d'algèbre extérieure 153

10.1. Endomorphismes constructibles	153
10.1.1. Construction d'endomorphisme sur $\Lambda^p E$	153
10.1.2. Invariants des familles d'endomorphismes	158
10.1.3. Applications aux invariants d'un endomorphisme	159
10.1.4. Endomorphisme conjugué	164
10.2. Décomposition d'endomorphismes d'algèbre extérieure	167
10.2.1. Prospection dans $\mathcal{L}(\Lambda^2 \mathbb{R}^3)$	167
10.2.2. Constructibilité des endomorphismes de $\Lambda^{n-1} E$	170
10.2.3. Formule d'inversion de Laplace	173

Chapitre 11. L'algèbre $\Lambda^2 E$ 175

11.1. Correspondance entre opérateurs antisymétriques et éléments de $\Lambda^2 E$	175
11.1.1. Rappels élémentaires sur les symétries d'opérateurs	175
11.1.2. Défaut de diagonalisation dans les espaces pseudo-euclidiens	177
11.1.3. Isomorphisme entre opérateurs antisymétriques et éléments de $\Lambda^2 E$	179
11.2. Décomposabilité(s) dans $\Lambda^2 E$	180
11.2.1. Décomposabilité simple	180
11.2.2. P-décomposabilité	182
11.2.3. Interprétations en termes d'opérateurs	187
11.2.4. Pseudo-orthodécomposabilité	188

Bibliographie 197

Index 199