Avant-propos

Hermann Grassmann. Ce n'est pas qu'il a été injustement critiqué par ses pairs (comme le fut par exemple L. Boltzmann). C'est juste, sans même prendre la peine de trop exagérer, qu'ils l'ont purement et simplement ignoré. Ses idées, fulgurantes au regard des théories mathématiques contemporaines, sont pourtant la base de nombreuses constructions algébriques actuelles. C'est peu dire, bien entendu, que Grassmann était beaucoup trop en avance sur son temps. Mais comment ne pas s'étrangler devant cette aberration qui veut, aujourd'hui encore, plus de deux cents ans après la naissance de son auteur (1809), que l'algèbre de Grassmann ne soit toujours pas au programme des formations élémentaires ? Et cette question à laquelle on peine à trouver une réponse : pourquoi devoir rester enfermé dans l'espace étouffant d'un formalisme vectoriel insuffisant au regard des questions posées par la géométrie alors que celui des *multivecteurs* donne des réponses remarquablement efficaces ?

On pourrait sans aucun doute paraphraser le sociologue et s'en remettre à cette constatation d'une désarmante cruauté : « Il n'y a pas de force intrinsèque de l'idée vraie. » Ainsi, et même si de façon tout à fait objective l'algèbre de Grassmann constitue le cadre idéal du discours mathématique sur de multiples aspects, elle a toutes les chances de rester dans l'inconnu pour peu que personne ne soit effectivement disposé à son égard. Ce qui permet au passage de démythifier lucidement la production de la connaissance scientifique, idéalement célébrée (et par ses propres producteurs) comme l'incarnation de la raison triomphante, quand bien même elle obéit de façon trop évidente à des logiques troubles qui n'ont hélas pas toujours à voir avec l'utile diffusion des idées porteuses.

On n'en finirait plus d'énoncer les domaines, de la plus haute importance, où l'algèbre extérieure intervient de façon décisive. Calcul différentiel, géométrie différentielle, projective, électromagnétisme, mécaniques (classique, relativiste, quantique), etc. Et encore, il ne s'agit là que des applications les plus évidemment dépendantes des algèbres extérieures. Au niveau le plus basique, on pourrait juste expliquer, à quiconque voudrait encore trouver des arguments, que l'algèbre de Grassmann est tout simplement le meilleur cadre possible pour parler des déterminants. Au fond, ce qui frappe le plus, à l'heure où la physique théorique triomphe de façon éclatante (comment ne pas s'émerveiller devant la découverte des ondes gravitationnelles), c'est la persistance de l'outil de calcul vectoriel en lieu et place de l'outil multivectoriel. Ainsi, des objets aussi étranges que le symbole de Levi-Civita (d'ordre trois et que certains ont pu généraliser jusqu'à l'ordre n) ou même, comme nous l'argumenterons, le simple produit vectoriel, ne sont-ils qu'une façon bien étrange et bien complexe en vérité d'éviter, sans que l'on n'en voit précisément les raisons, l'utilisation du formalisme grassmannien.

Le pire, dans cette ignorance systématiquement entretenue et diffusée, c'est que la construction de l'algèbre extérieure *via* la résolution d'un problème universel est aujourd'hui un simple exercice de style totalement intégré dans le discours algébrique. Alors que les concepts basiques de l'algèbre linéaire s'enseignent de façon routinière (et sans doute trop automatique) dès les premiers pas dans l'enseignement supérieur, il n'y a absolument aucune difficulté à entrer de plain-pied, dès le vocabulaire posé, dans la construction de la tensorialité, dût-elle être antisymétrique. Ce qui constitue précisément la nature de l'algèbre extérieure. Alors, une fois le cadre installé, les questions structurelles se formulent naturellement les unes après les autres, et les réponses qu'on leur donne s'enchaînent tout aussi simplement que les interrogations qui les ont engendrées.

Mais pour que cette introduction soit tout à fait honnête, encore faudrait-il en venir aux raisons qui ont porté la motivation de l'écriture. L'histoire dérisoire d'un enseignant, perplexe devant les difficultés de ses étudiants à comprendre le formalisme de la mécanique newtonienne. Il faut dire que nous en sommes hélas arrivés à un stade où, en France, la succession des différentes réformes de l'enseignement (aussi bien dans le secondaire que dans le supérieur du reste) a totalement ôté aux étudiants tous les moyens sérieux de faire des sciences un tant soit peu constructives. Enseignant qui ne peut donc plus s'attaquer directement à la mécanique en dimension trois et qui se pose cette question : mais comment poser un formalisme en dimension deux, qui puisse se décliner de la même manière à la dimension trois (et *in fine* à la dimension n) ? Mais pour qu'une telle entreprise pût se réaliser, encore fallait-il être capable de se débarrasser d'un encombrant faux ami : le produit vectoriel. Tâche qui pouvait sembler impossible dans un premier temps, tant cette opération algébrique structure tout le formalisme de la mécanique et de l'électromagnétisme. Or le produit vectoriel a bien une généralisation dans toutes les dimensions : c'est la conjugaison de Hodge du produit extérieur. Alors la conclusion s'impose : dans tout le formalisme de la mécanique, le produit vectoriel peut et doit être remplacé par le produit extérieur. Alors, les moments (de force ou cinétiques) doivent s'appréhender comme des bivecteurs et non plus comme des vecteurs. Alors il devient évident de passer à la construction de l'algèbre extérieure.

Comme le disait P. Bourdieu : « On fait de la science autant avec sa formation que contre sa formation. » Et c'est précisément dans cet état d'esprit que cet ouvrage est écrit. Pour la mécanique mais aussi définitivement contre elle. Ce livre est donc un livre d'algèbre. Mais surtout pas un livre d'algébriste. En particulier, la rédaction ne cherche en aucun cas à éviter l'exposition détaillée, parfois extrêmement basique, que les algébristes de métier trouveraient fort inutile. Il s'agit plutôt d'une visite guidée dans le monde si bien posé de Grassmann, sans autre ambition que *d'éclairer aussi minutieusement que possible les bases du formalisme extérieur*. C'est un livre qui ne se focalise *a priori* sur aucune utilisation particulière (même s'il est évidemment impossible de ne pas orienter le lecteur sur quelques utilisations futures) pour laisser ouvert le champ des possibles. C'est un livre génétiquement élémentaire, auquel doivent pouvoir accéder tous ceux qui, physiciens ou informaticiens en herbe, mathématiciens ou étudiants curieux d'explorer la fulgurance des constructions algébriques, ont besoin ou envie de se familiariser avec l'algèbre extérieure.

Cet ouvrage procède donc d'une inspiration à la fois modeste et personnelle. Il emprunte naturellement à beaucoup de lectures totalement éparses, issues de milieux scientifiques radicalement différents, souvent inégales, en qualité et en quantité, que l'on peut trouver sur la toile. Il serait impossible de répertorier l'ensemble des sources, se résumant parfois à quelques simples lignes, à partir desquelles nous avons formulé les problématiques et rédigé les démonstrations présentées dans ce document. Il existe hélas trop peu de références classiques sur les algèbres extérieures pour que nous puissions vraiment écrire que nous nous y référons. À condition de savoir trier le bon grain de l'ivraie, ce qui n'est jamais chose aisée s'agissant de l'information disponible sur le net, on peut toujours retirer quelque chose de la masse des documents que l'on peut trouver grâce aux moteurs de recherche. S'agissant d'édition traditionnelle, le seul ouvrage qui nous paraisse au fondement des algèbres extérieures est celui de L. Schwartz sur les tenseurs [SCH 81]. Mais la présentation semble trop bourbakiste pour pouvoir réellement se diffuser en dehors d'un public malheureusement trop restreint. L. Schwartz lui-même écrivait dans son autobiographie (*Un mathématicien aux prises avec le siècle*) à propos des tenseurs [SCH 97] : « Si certains mathématiciens franchissent aisément le seuil du produit tensoriel de deux espaces vectoriels, il constitue pour d'autres une difficulté durable, et quelques mathématiciens réputés ne parviennent pas à l'utiliser. » Nous espérons que cet ouvrage sera plus abordable et permettra de lever quelques incompréhensions.

Il serait illusoire cependant de ne pas évoquer les inévitables erreurs, imprécisions, approximations, coquilles ou autres maladresses qui se sont nécessairement glissées dans cet ouvrage, échappant à notre vigilance malgré toutes les précautions et les fiévreuses relectures que nous avons pu réaliser. À l'avance, nous nous excusons des désagréments que cela pourrait occasionner tout en restant confiants sur la pertinence de l'ensemble et des éclaircissements qu'il apportera, quoi qu'il arrive (et nous l'espérons), sur les algèbres extérieures. À tous ceux qui s'apprêtent à suivre le chemin des idées grassmanniennes, nous souhaitons donc une bonne lecture.

Introduction

C'est en 1844, alors qu'il a 35 ans, que Hermann Grassmann publia son livre *Die lineale Ausdehnungslehre* [GRA 44][1]. Bien que célébré aujourd'hui comme un ouvrage majeur de l'algèbre et de la géométrie (on pourra trouver dans [SCH 96] un florilège d'analyses et de commentaires éclairés sur la pertinence des idées de Grassmann), il apparaît que ses contemporains l'ignorèrent superbement, reprochant à son auteur un style beaucoup trop hermétique pour être étudié. Et ce ne fut là que le commencement de « la tragédie de Grassmann », comme la nomma si pertinemment J. Dieudonné [DIE 79] : « Dans la galerie des mathématiciens importants, depuis les Grecs, qui ont marqué la science de leur empreinte, Hermann Grassmann fait figure du plus exceptionnel à bien des égards, si on doit le comparer à d'autres, tant sa carrière fut une succession ininterrompue d'étrangetés : singuliers étaient ses sujets d'étude ; inhabituel son style mathématique ; hautement étrange sa prise de conscience tardive de ses propres capacités à faire des mathématiques ; spécifique et malheureuse l'absence totale de compréhension de ses idées, non seulement de son vivant mais aussi après sa mort ; déplorable le dédain qui le confina à enseigner toute sa vie comme professeur dans le second degré.[2] ». Et ce ne fut pas seulement parce que Gibbs introduisit ses calculs vectoriels, devenus dominants dans le formalisme de la physique, que Grassmann (mais aussi Clifford) tombèrent dans l'oubli. Si l'on en croit Friedrich

1. Il existe une traduction française de cet ouvrage par D. Flament (et B. Bekemeier) : *La Science de la grandeur extensive : la lineale Ausdehnungslehre*, Albert Blanchard, Paris, 1994.

2. Pour la citation originale : « In the whole gallery of prominent mathematicians who, since the time of the Greeks, have left their mark on science, Hermann Grassmann certainly stands out as the most exceptional in many respects, when compared with other mathematicians, his career is an uninterrupted succession of oddities : unusual were his studies ; unusual his mathematical style ; highly unusual in his own belated realization of his powers as a mathematician ; unusual and unfortunate the total lack of understanding of his ideas, not only during his lifetime but long after his death ; deplorable the neglect which compelled him to remain all his life professor in a high school. »

Engel [ENG 11] (tel que le cite Fearnley-Sander [FEA 79]), Cauchy lui-même, dont on sait qu'il avait eu copie de l'ouvrage de Grassmann, utilisa, dans un papier intitulé « Sur les clefs algébriques » [CAU 82], les idées de *Die lineale Ausdehnungslehre* sans la moindre allusion à leur auteur. Et même lorsque les plus reconnus des mathématiciens utilisèrent, en le référençant, les idées de Grassmann, c'était seulement parfois du bout des lèvres. Ainsi, David Hestenes [PET 11], citant à son tour Engel [ENG 11] pouvait-il écrire : « Elie Cartan (1922) utilisa le produit extérieur dans ses calculs sur les formes différentielles. Et bien que cela plaçât alors le nom de Grassmann dans les références classiques des mathématiques, ses idées y furent cependant tant diluées que Engel les qualifia de "Grassmann sauce Cartan". Comble de l'ironie, Cartan (1968) utilisa également une forme matricielle de l'algèbre de Clifford dans sa théorie des spineurs, mais il fut incapable d'en identifier les liens avec l'algèbre de Grassmann et les formes différentielles.[3] »

Bien que réécrit en 1862 sous une forme qu'il pensait alors plus accessible [GRA 62], les idées et le formalisme contenus originellement dans [GRA 44] ne connurent pas meilleure fortune que dans leur forme originelle, même si, comme le signale D. Flament [FLA 05], on commença alors à voir émerger, dans les années 1870, des références à Grassmann, de la part de mathématiciens aussi renommés que Klein, Hankel ou encore Lie. Pour Dieudonné [DIE 79], ce n'est qu'en comprenant plus profondément le formalisme de Cartan que l'on commença à reconsidérer les idées de Grassmann : « C'est seulement après 1930, lorsque l'œuvre de Elie Cartan a commencé à être comprise, que celle de Grassmann a repris la place centrale qui lui revenait dans toutes les applications de l'algèbre multilinéaire. »

Dans cet ouvrage, nous introduisons, à un niveau que nous pensons accessible au plus grand nombre, la construction du produit extérieur et ses utilisations élémentaires, devenues si importantes (en fait incontournables) dans les mathématiques et la physique.

Comme le disait fort justement D. Hestenes (voir [SCH 96]) : « Toutes les présentations traditionnelles de l'algèbre extérieure de Grassmann sont assez loin de la vision originelle de leur auteur.[4] ». Et ce livre, pas plus que les autres, n'échappe à la règle. Il s'agit simplement d'une présentation que nous espérons contemporaine du produit extérieur et de ses principales utilisations dans le formalisme de l'algèbre

3. Pour la citation originale : « Elie Cartan (1922) incorporated Grassmann's outer product into his calculus of differential forms. Though it put Grassmann's name into the mathematics mainstream, it so diluted his ideas that Engel called it "Cartanized Grassmann". In another irony, Cartan (1968) also employed a matrix form of Clifford algebra in his "theory of spinors", but he failed to recognize its relation to Grassmann algebra and differential forms. »

4. Pour la citation originale : « Still, in conception and applications, conventional renditions of his exterior algebra fall far short of Grassmann's original vision. »

linéaire et multilinéaire. En un sens, il s'agit là de réaliser, humblement, et avec toute l'admiration que l'on doit à son inventeur, l'un des souhaits que ce dernier exprimait dans la préface de son ouvrage : (cité par [FEA 79]) « Je suis conscient de n'avoir pas réuni autour de moi (comme je l'ai pourtant souhaité en vain jusqu'à présent) un cercle de savants, avec lesquels j'aurais pu faire fructifier ces idées, les enrichir et les développer plus loin, mais un temps viendra où ces idées, peut-être sous une nouvelle forme, renaîtront et entameront un dialogue vivant avec les considérations de leur époque. Car la vérité est éternelle et divine.[5] ». Une présentation vivante donc, en utilisant ce que l'algèbre a clarifié depuis des décennies, pour partager avec le lecteur les développements fertiles que permettent les algèbres de Grassmann.

Afin de guider le lecteur à travers cet ouvrage, nous présentons brièvement chacun des chapitres qui le constitue.

1) Le premier chapitre traite de rappels d'algèbre linéaire. Il s'agit essentiellement des notions fondamentales d'espace vectoriel de dimension infinie telles que l'on peut les apprendre dès les premières années d'enseignement supérieur. Ce chapitre peut être aisément omis par les plus aguerris des lecteurs qui n'y trouveront rien de nouveau. Loin de constituer un cours complet, autonome sur les espaces vectoriels (dans ce qu'ils peuvent avoir de plus abstrait), ce chapitre donne juste ce qu'il faut de nécessaire pour mettre en place les structures algébriques qui nous permettront de construire ensuite les algèbres extérieures. On y rappelle les bases algébriques ainsi que quelques notions d'application linéaire et de dualité, les relations d'équivalences et les espaces quotients, les permutations, la multilinéarité et l'antisymétrie.

2) Le deuxième chapitre *construit* les algèbres extérieures *via* la résolution d'un problème universel. Il se focalise dans un premier temps sur l'algèbre extérieure de degré deux et explique ensuite comment la construction envisagée se généralise pour les algèbres de degré p. Notons que la construction est faite de manière directe, sans passer d'abord par la construction plus générale des tenseurs (même si une telle approche est signalée en fin de chapitre). Dans une seconde partie, on montre l'unicité (à un isomorphisme près) des algèbres extérieures de degré p. Le chapitre se termine par quelques remarques et un peu de vocabulaire. L'intérêt de ce chapitre réside dans le fait d'éviter la présentation axiomatique des algèbres extérieures.

3) Le troisième chapitre étudie en détail la construction du produit extérieur entre éléments d'algèbres extérieures. Il montre les propriétés techniques essentielles de cette opération (l'antisymétrie, la distributivité, etc.) et permet de définir l'algèbre de

5. Pour la citation originale : « I know that if I also fail to gather around me (as I have until now desired in vain) a circle of scholars, whom I could fructify with these ideas, and whom I could stimulate to develop and enrich them further, yet there will come a time when these ideas, perhaps in a new form, will arise anew and will enter a living communication with contemporary developments. For truth is eternal and divine. »

Grassmann comme algèbre graduée. On construit ensuite « à la main » le produit extérieur entre formes linéaires et on se sert alors de cet outil pour démontrer la propriété la plus essentielle du produit extérieur entre vecteurs : sa nullité permet d'en caractériser la dépendance.

4) Le quatrième chapitre se focalise sur l'établissement des bases d'algèbres extérieures. Cette construction est faite lorsque l'espace vectoriel originel est muni d'une base algébrique indexée par un ensemble totalement ordonné. On détaille alors rapidement le cas de la dimension finie. On s'attarde ensuite sur la caractérisation des espaces duaux d'algèbres extérieures. En particulier, dans le cas de la dimension finie, on obtient la construction caractéristique des formes multilinéaires antisymétriques grâce aux produits extérieurs des formes, elles-mêmes obtenues comme éléments du dual des algèbres extérieures.

5) Le cinquième chapitre se consacre à la question des déterminants. Ces derniers sont introduits de façon naturelle comme composantes des p-vecteurs décomposés pour des bases de produits extérieurs. À partir de cette définition, les propriétés classiques des déterminants sont redémontrées et les manières usuelles de calculer les déterminants revues. On constate que l'approche par algèbre extérieure des déterminants est aussi efficace qu'élégante et procure par exemple une manière très astucieuse (quoique structurellement tout à fait méthodique en fait) de calculer « à la main » les déterminants de taille 4 sans aucune difficulté. On montre également que le formalisme extérieur, en ce qu'il est intimement lié aux calculs de déterminants, permet une analyse formelle efficace des systèmes linéaires : on redémontre ainsi aisément les formules de Cramer tout en découvrant un cadre agréable pour l'énoncé du théorème de Rouché-Fontené.

6) Le sixième chapitre est *a priori* indépendant des questions extérieures. Il s'attarde sur la notion de pseudo-produit scalaire en rappelant les analogies et les différences existant avec le produit scalaire (euclidien). Au centre de ces considérations, la définition de l'orthogonalité, la caractérisation des sous-espaces non dégénérés ainsi que la construction des bases (pseudo)-orthonormées. On termine par la classique loi d'inertie de Sylvester.

7) Le septième chapitre induit de façon naturelle les pseudo-produits scalaires de l'espace vectoriel vers ses algèbres extérieures. Il permet ainsi de construire des bases pseudo-orthonormées d'algèbres extérieures à partir de bases pseudo-orthonormées de l'espace vectoriel et de fournir des caractérisations de non-dégénérescence. Dans le cas euclidien, la norme du produit extérieur permet de calculer le volume du parallélotope ou du simplex construit sur les vecteurs en question. On donne également par un calcul extérieur une présentation du calcul de la mesure de Riemann des variétés différentielles.

8) Le huitième chapitre est un chapitre qui aborde la question de la divisibilité et de la décomposabilité des éléments d'algèbres extérieures. Comme préliminaire

à l'étude de ces questions, nous introduisons la notion fondamentale de produit de contraction, comme produit dual du produit extérieur. Un théorème fondamental nous donne alors la caractérisation de la divisibilité par les vecteurs anisotropes. L'ultime résultat du chapitre permet de montrer un résultat systématique de décomposition pour les éléments des algèbres de degré $n - 1$.

9) Le neuvième chapitre définit et étudie la conjugaison de Hodge. On définit d'abord cette opération grâce au produit de contraction. Dans un second temps, on élargit le théorème du chapitre précédent (sur la divisibilité par les vecteurs) aux k-blades. On montre alors le lien de la conjugaison de Hodge avec le problème de la division vectorielle. On étudie ensuite quelques propriétés de calcul sur le conjugué. Nous expliquons ensuite comment la conjugaison de Hodge permet de généraliser la notion de produit vectoriel à toutes les dimensions. Dans la deuxième partie du chapitre, à la conjugaison près, nous définissons le produit régressif comme conjugué du produit extérieur. Nous induisons ainsi quelques propriétés sur cette opération, qui est un outil utile dans l'écriture et pour le calcul.

10) Le dixième chapitre pose la question importante des endomorphismes d'algèbres extérieures. Nous montrons comment il est possible de construire des endomorphismes d'algèbres extérieures à partir d'endomorphismes sur l'espace vectoriel. Nous introduisons la notion d'invariant d'une famille d'endomorphismes, qui nous permet de retrouver naturellement la question des invariants d'endomorphisme et de leurs propriétés fondamentales. Nous passons ensuite rapidement à la notion d'endomorphisme conjugué. Cette notion nous permet alors de poser la question de la décomposabilité des endomorphismes d'algèbres extérieures que l'on relie finalement à la formule d'inversion de Laplace des isomorphismes.

11) L'ultime et onzième chapitre se focalise sur l'étude particulière de l'algèbre extérieure de degré deux. Un résultat fondamental montre que cette algèbre est isomorphe aux opérateurs linéaires antisymétriques sur l'espace vectoriel. En étudiant des résultats de décomposabilité de l'algèbre 2-extérieure, on montre des résultats de décomposition (pseudo)-orthogonale sur les opérateurs (pseudo)-antisymétriques. Au passage on démontre le résultat classique du lemme de Cartan.