

Table des matières

Introduction	11
Familiarisation avec les espaces semi-normés	15
Chapitre 1. Prérequis	17
1.1. Ensembles, applications, relations d'ordre	17
1.2. Dénombrabilité	19
1.3. Construction de \mathbb{R}	20
1.4. Propriétés de \mathbb{R}	21
Partie 1. Espaces semi-normés	25
Chapitre 2. Espaces semi-normés	27
2.1. Définition des espaces semi-normés	27
2.2. Suites convergentes	31
2.3. Bornés, ouverts, fermés	33
2.4. Intérieur, fermeture, boules, semi-boules	37
2.5. Densité, séparabilité	39
2.6. Compacts	41
2.7. Parties connexes, convexes	46
Chapitre 3. Comparaison d'espaces semi-normés	51
3.1. Familles équivalentes de semi-normes	51
3.2. Égalités et inclusions topologiques	53
3.3. Sous-espaces topologiques	57
3.4. Familles filtrantes de semi-normes	62
3.5. Somme d'ensembles	64
Chapitre 4. Espaces de Banach, Fréchet et Neumann	67
4.1. Espaces métrisables	67
4.2. Propriétés des ensembles d'un espace métrisable	69

4.3. Espaces de Banach, Fréchet, Neumann	73
4.4. Compacts d'un espace de Fréchet	75
4.5. Propriétés de \mathbb{R}	76
4.6. Séries convergentes	79
4.7. Complété séquentiel d'un espace semi-normé	81
Chapitre 5. Espaces de Hilbert	83
5.1. Espaces de Hilbert	83
5.2. Projection dans un espace de Hilbert	86
5.3. Espace \mathbb{R}^d	89
Chapitre 6. Produit, intersection, somme et quotient d'espaces	93
6.1. Produit d'espaces semi-normés	93
6.2. Produit d'un espace semi-normé par lui-même	98
6.3. Intersection d'espaces semi-normés	100
6.4. Somme d'espaces semi-normés	104
6.5. Somme directe d'espaces semi-normés	110
6.6. Espace quotient	114
Partie 2. Applications continues	117
Chapitre 7. Applications continues	119
7.1. Applications continues	119
7.2. Continuité et changement de topologie ou restriction	122
7.3. Composition d'applications continues	124
7.4. Semi-normes continues	125
7.5. Applications linéaires continues	126
7.6. Applications multilinéaires continues	130
7.7. Quelques applications continues	133
Chapitre 8. Images d'ensembles par une application continue	137
8.1. Images d'ensembles ouverts, fermés	137
8.2. Images d'ensembles denses, séparables, connexes	139
8.3. Images d'ensembles compacts	141
8.4. Images par une application linéaire continue	143
8.5. Applications continues dans un compact	145
8.6. Applications réelles continues	146
8.7. Applications compactantes	148
Chapitre 9. Propriétés d'applications dans des espaces métrisables	151
9.1. Applications continues dans un espace métrisable	151

9.2. Théorème de point fixe de Banach	155
9.3. Théorème de Baire	156
9.4. Théorème de l'application ouverte	158
9.5. Théorème de continuité de Banach–Schauder	160
9.6. Théorème du graphe fermé	161
Chapitre 10. Prolongement, équicontinuité	163
10.1. Extension d'une égalité par continuité	163
10.2. Prolongement continu d'une application	164
10.3. Familles équicontinues d'applications	168
10.4. Théorème d'équicontinuité de Banach–Steinhaus	171
Chapitre 11. Compacité dans des espaces d'applications	177
11.1. Espaces $\mathcal{F}(X; F)$ et $\mathcal{C}(X; F)$ -simple	177
11.2. Lemme de Zorn	178
11.3. Compacité de familles d'applications	181
11.4. Un théorème de compacité d'Ascoli	185
Chapitre 12. Espaces d'applications linéaires ou multilinéaires	187
12.1. Espace $\mathcal{L}(E; F)$	187
12.2. Bornés de $\mathcal{L}(E; F)$	190
12.3. Complétion séquentielle de $\mathcal{L}(E; F)$ lorsque E est métrisable	191
12.4. Semi-normes et norme sur $\mathcal{L}(E; F)$ lorsque E est normé	193
12.5. Continuité de la composition des applications linéaires	195
12.6. Inversibilité au voisinage d'un isomorphisme	199
12.7. Espace $\mathcal{L}^d(E_1 \times \cdots \times E_d; F)$	202
12.8. Séparation des variables d'une application multilinéaire	206
Partie 3. Topologies faibles	211
Chapitre 13. Dualité	213
13.1. Dual	213
13.2. Dual d'un espace métrisable ou normé	217
13.3. Dual d'un espace de Hilbert	220
13.4. Extraction de sous-suites * faiblement convergentes	223
13.5. Continuité de la forme bilinéaire de dualité	228
13.6. Dual d'un produit	229
13.7. Dual d'une somme directe	230
Chapitre 14. Dual d'un sous-espace	233
14.1. Théorème de Hahn–Banach	233
14.2. Corollaires du théorème de Hahn–Banach	235

14.3. Caractérisation d'un sous-espace dense	236
14.4. Dual d'un sous-espace	237
14.5. Dual d'une intersection	239
14.6. Identifications périlleuses	240
Chapitre 15. Topologie faible	245
15.1. Topologie faible	245
15.2. Continuité faible et inclusions topologiques	248
15.3. Topologie faible d'un produit	249
15.4. Topologie faible d'une intersection	250
15.5. Norme et semi-normes d'une limite faible	252
Chapitre 16. Propriétés d'ensembles pour la topologie faible	255
16.1. Théorème de Banach–Mackey (ensembles faiblement bornés)	255
16.2. Jauge d'un ouvert convexe	257
16.3. Théorème de Mazur (convexes faiblement fermés)	259
16.4. Théorème de Šmulian (ensembles faiblement compacts)	261
16.5. Continuité semi-faible d'une application bilinéaire	264
Chapitre 17. Réflexivité	267
17.1. Espaces réflexifs	267
17.2. Complétion séquentielle d'un espace semi-réflexif	271
17.3. Préréflexivité des espaces métrisables	272
17.4. Réflexivité des espaces de Hilbert	275
17.5. Réflexivité des espaces de Banach uniformément convexes	276
17.6. Une propriété des combinaisons de formes linéaires	280
17.7. Caractérisations de la semi-réflexivité	282
17.8. Réflexivité d'un sous-espace	285
17.9. Réflexivité de l'image d'un espace	286
17.10. Réflexivité du dual	287
Chapitre 18. Espaces extractables	291
18.1. Espaces extractables	291
18.2. Extractabilité des espaces de Hilbert	292
18.3. Extractabilité d'espaces semi-réflexifs	293
18.4. Extractabilité d'un sous-espace ou de l'image d'un espace	295
18.5. Extractabilité d'un produit ou d'une somme	296
18.6. Extractabilité d'une intersection	297
18.7. Complétion séquentielle des espaces extractables	297

Partie 4. Calcul différentiel	299
Chapitre 19. Applications différentiables	301
19.1. Applications différentiables	301
19.2. Différentiabilité, continuité et linéarité	303
19.3. Différentiation et changement de topologie ou restriction	305
19.4. Théorème des accroissements finis	307
19.5. Bornes d'une application réelle différentiable	310
19.6. Différentiation d'une application composée	312
19.7. Différentielle d'une application réciproque	316
19.8. Théorème d'inversion locale	316
Chapitre 20. Différentiation d'applications de plusieurs variables	321
20.1. Différentiation partielle	321
20.2. Différentiation d'une application multilinéaire ou multicomposante	324
20.3. Différentiation d'une application composée de plusieurs variables	326
Chapitre 21. Différentiations successives	329
21.1. Différentiations successives	329
21.2. Théorème de symétrie de Schwarz	331
21.3. Différentiations successives d'une application composée	334
Chapitre 22. Dérivation de fonctions d'une variable réelle	339
22.1. Dérivée d'une fonction d'une variable réelle	339
22.2. Dérivée d'une fonction réelle d'une variable réelle	341
22.3. Formule de Leibniz	345
22.4. Dérivées des fonctions puissance, logarithme et exponentielle	346
Bibliographie	351
Auteurs cités	357
Notations	361
Index	363