Introduction

Objectif. Ce livre est le premier des cinq volumes de la série, *Analyse pour les edp* dédiée aux outils mathématiques pour les équations aux dérivées partielles issues de la physique :

volume 1 : *Espaces de Banach, Fréchet, Hilbert et Neumann*
volume 2 : *Distributions à valeurs réelles ou dans un espace de Neumann*
volume 3 : *Espaces de Lebesgue et de Sobolev, à valeurs réelles ou dans un espace de Neumann*
volume 4 : *Traces sur un bord différentiable ou lipschitien*
volume 5 : *Équations aux dérivées partielles*

Ce premier volume est consacré aux espaces vectoriels normés ou semi-normés, dont les espaces de Banach, Fréchet et Hilbert, avec des développements nouveaux sur les *espaces de Neumann* — c'est-à-dire dans lesquels toute suite de Cauchy converge — et sur les *espaces extractables* — c'est-à-dire dans lesquels toute suite bornée a une sous-suite faiblement convergente.

Il présente les principales propriétés de ces espaces utiles pour la construction des espaces de distributions, de Lebesgue et de Sobolev à valeurs réelles ou dans un espace de Neumann, respectivement aux volumes 2 [106], 3 [107] et 4 [108], et pour la résolution d'équations aux dérivées partielles, au volume 5 [109]. Dans ce but, le calcul différentiel est étendu aux espaces semi-normés.

Public visé. Nous avons cherché des méthodes simples nécessitant un bagage minimal pour rendre ces outils accessibles au plus grand nombre — doctorants, étudiants de troisième cycle, ingénieurs — sans en restreindre la généralité... et même en généralisant certains résultats, ce qui destine ce livre également aux chercheurs. Ceci nous a conduit à une approche peu classique privilégiant les semi-normes et les propriétés séquentielles, que ce soit de complétude, de compacité ou de continuité.

Pourquoi les espaces semi-normés ? Nous ne nous limitons pas aux espaces normés car des espaces essentiels pour les edp ne sont pas normables, tels $\mathcal{D}'(\Omega)$, $L^p_{\rm loc}(\Omega)$ ou $H^m(\Omega)$-faible.

Nous nous intéressons aux espaces vectoriels E munis d'une famille de semi-normes, plutôt que d'une topologie localement convexe ce qui est équivalent, pour pouvoir y **définir la différentiabilité** (p. 301) en comparant les semi-normes d'une variation de la donnée aux semi-normes de la variation de l'application. Ceci permet également de **définir** $L^p(\Omega; E)$ (volume 3), car on peut élever une semi-norme à une puissance p, pas un voisinage !

En outre, l'étude est plus simple avec les semi-normes qu'avec la topologie, bien que moins habituelle : elle suit celle des espaces normés, la différence principale consistant à travailler sur plusieurs semi-normes ou normes au lieu d'une seule norme.

Espaces de Neumann. Nous étudions particulièrement les espaces qui sont séquentiellement complets — nous les appelons *de Neumann* — car il est essentiel que E ait cette propriété pour définir $\mathcal{D}'(\Omega; E)$ et $L^p(\Omega; E)$: c'est elle qui leur assure des propriétés satisfaisantes et en particulier que $\int_\Omega f \in E$ lorsque $f \in \mathcal{C}(\Omega; E)$ et que $\mathcal{C}(\Omega; E) \subset \mathcal{D}'(\Omega; E)$ comme on le verra au volume 2. L'étude de ces espaces est une étape dans celle d'espaces utiles pour les edp d'évolution comme $L^2(]0, T[; L^2_{\mathrm{loc}}(\Omega))$, $L^p(]0, T[; E\text{-faible})$ ou $\mathcal{D}'(]0, T[; \mathcal{D}'(\Omega))$.

Si le nom *séquentiellement complet* est moins simple, le concept est, lui, plus simple que *complet*, *cf.* définition 4.8 p. 73, et, surtout, plus général : par exemple, si E est un espace de Hilbert de dimension infinie, E-faible est séquentiellement complet mais n'est pas complet, *cf.* (4.11), p. 82.

Espaces extractables et réflexifs. Nous étudions de façon exhaustive les espaces dans lesquels toute suite bornée a une sous-suite faiblement convergente — nous les appelons *extractables* — car cette propriété est à la base de nombreux résultats d'existence de solutions d'edp.

Nous étudions aussi la réflexivité en détail car elle fournit des résultats d'extractabilité. Nous équilibrons et simplifions sa définition en introduisant une notion nouvelle, la *préréflexivité* (définition 17.1, p. 267).

Autres propriétés séquentielles. Nous insistons également sur :
— La *compacité séquentielle* d'un ensemble car elle est à la base de l'extractabilité : elle assure que toute suite a une sous-suite convergente, ce que la compacité n'assure pas, *cf.* (2.6), p. 43.
— La *densité séquentielle* qui fournit de meilleures approximations que la densité.
— La *continuité séquentielle* car des applications importantes sont séquentiellement continues mais non continues, comme la forme bilinéaire de dualité d'un espace non normable (théorème 13.22, p. 228) ou la composition d'applications linéaires (théorème 12.12, p. 196).

Pour autant, nous ne délaissons pas les propriétés topologiques car elles sont distinctes de leurs homologues séquentiels dans les espaces non métrisables.

Topologies faibles. La topologie de $E\text{-faible}$ est définie très simplement par les semi-normes $\|e\|_{E\text{-faible};e'} = |\langle e', e\rangle|$ indexées par $e' \in E'$. De même la topologie de $E'\text{-}*\text{faible}$ est définie par les $\|e'\|_{E'\text{-}*\text{faible};e} = |\langle e', e\rangle|$ indexées par $e \in E$.

Calcul différentiel. Nous étudions la différentiabilité dans tout espace semi-normé séparé E car c'est un outil important pour l'étude des distributions à valeurs dans un tel espace. Elle ne nous semblait faite que dans un espace normé, ou dans certains cas particuliers comme la *différentiabilité scalaire* qui correspond à la différentiabilité dans $E\text{-faible}$.

Nombre de propriétés classiques subsistent, mais pas toutes. Par exemple, nous ne savons pas démontrer la différentiabilité d'ordre deux ou plus d'une application composée lorsque l'espace intermédiaire n'est pas normé, *cf.* théorème 21.6, p. 334, ou la continuité de la différentielle de la composée d'applications continûment différentiables, *cf.* théorème 19.18, p. 313.

Nouveautés. L'extension du calcul différentiel aux espaces semi-normés séparés (aux chapitres 19 à 21) nous semble nouvelle. De même que les caractérisations du dual et de la topologie faible d'une intersection d'espaces semi-normés (théorèmes 14.9, p. 239 et 15.11 p. 250) et la propriété d'extractabilité d'une telle intersection (théorème 18.14, p. 297). Et que l'introduction des espaces de Neumann (définition 4.10, p. 73), des espaces extractables (définition 18.1, p. 291), de la préréflexivité (définition 17.1, p. 267) et des applications compactantes (définition 8.14, p. 148).

La préréflexivité des espaces métrisables (théorème 17.8, p. 273) et, plus généralement, infratonnelés (théorème 17.11, p. 274) est nouvelle sous cette forme (qui équivaut à des résultats antérieurs *cf.* note 4, p. 273).

Prérequis. Les démonstrations dans le corps du texte ne font appel à aucun résultat extérieur, excepté des propriétés de dénombrabilité et de $\mathbb{R}$ dont les énoncés sont rappelés au chapitre 1. En effet il nous a paru intéressant de rappeler l'ensemble des connaissances nécessaires vu le déroulement non orthodoxe de cet ouvrage : étude des espaces semi-normés sans faire appel à la topologie générale, construction des distributions (au volume 2) avant celle des fonctions intégrables (au volume 3), etc.

Commentaires. Les commentaires composés en petits caractères peuvent, contrairement au corps du texte, faire appel à des résultats extérieurs ou non encore établis. Le premier chapitre, *Prérequis*, est, lui aussi, composé en petits caractères car il peut également être admis ou omis, de même que l'ultime section, *22.4 Dérivées des fonctions puissance, logarithme et exponentielle*.

Rappels. Ce livre est rédigé pour pouvoir être lu dans le désordre par un non-spécialiste : les démonstrations sont détaillées en incluant des arguments triviaux pour un connaisseur et les numéros des théorèmes utilisés sont systématiquement rappelés. L'auteur sollicite l'indulgence du lecteur pour la lourdeur qui peut en résulter.

Historique. L'origine des concepts et des résultats est précisée autant que possible, en notes de bas de page, en espérant que les inévitables injustices seront pardonnées et, surtout, signalées à l'auteur (pour les rééditions !). Outre l'opportunité de clamer ce que l'on croit être nouveau, l'historique montre que derrière chaque théorème il y a un homme, ici contemporain, là ancien vénérable, que nos ancêtres lointains — grecs inclus — raisonnaient aussi bien que nous et que, pourtant, des idées simples rest(ai)ent à trouver.

Navigation dans ce livre :

— La **table des matières**, en tête du livre, donne la liste des thèmes traités.
— L'**index**, p. 363, fournit un autre accès thématique.
— La **table des notations**, p. 361, précise leur sens en cas de doute.
— Les hypothèses sont, toutes, indiquées au sein des théorèmes eux-mêmes.
— La numérotation est commune à tous les énoncés (définitions, théorèmes et lemmes).

Remerciements. Enrique FERNÁNDEZ-CARA m'a suggéré de très nombreuses et pertinentes améliorations. Olivier BESSON et Fulbert MIGNOT ont également contribué à des améliorations substantielles. Le manuscrit et les démonstrations ont été relus avec soin par Jérôme LEMOINE et Pierre DREYFUSS ; ils sont donc entièrement responsables des erreurs qui pourraient subsister. Jacques BLUM a le grand mérite d'avoir arraché le manuscrit à sa torpeur.

Donald KNUTH a gracieusement mis à la disposition de la communauté scientifique son remarquable logiciel TeX, utilisé pour composer ce livre.

Il m'est très agréable de les remercier.

Jacques SIMON

Chapdes-Beaufort, le 1er juillet 2017